MIRCEA RADEȘ

VIBRAȚII MECANICE

MIRCEA RADEȘ

VIBRAȚII MECANICE

Prefață

Lucrarea se bazează pe cursurile de *Vibraţii mecanice* predate la Universitatea Politehnica Bucureşti, la facultatea I.M.S.T. (1972-2006), la cursul postuniversitar de Vibraţii organizat în cadrul Catedrei de Rezistenţa materialelor (1985-1990), la Facultatea de Inginerie în Limbi Străine, Filiera Engleză (1993-2007) şi la un curs de masterat de la Facultatea de Inginerie Mecanică şi Mecatronică.

Vibraţiile mecanice au fost introduse în planul de învăţământ al facultăţilor cu profil mecanic ca un curs de sine stătător în 1974. Pentru a susţine cursul, am publicat, sub conducerea profesorului Gh. Buzdugan, monografia *Vibraţiile sistemelor mecanice* la Editura Academiei în 1975, urmată de două ediţii ale manualului *Vibraţii mecanice* la Editura didactică şi pedagogică în 1979 şi 1982. În 1984 am publicat *Vibration Measurement* la Martinus Nijhoff Publ., Dordrecht, reprezentând versiunea revizuită în limba engleză a monografiei ce a apărut în 1979 la Editura Academiei.

După cum reiese din *Cuprins*, cursul este orientat spre aplicaţii inginereşti, fiind limitat la ceea ce se poate preda în 28 ore. Materialul prezentat conţine exerciţii rezolvate care susţin seminarul, în cadrul căruia se utilizează programe cu elemente finite elaborate de autor şi se prezintă lucrări demonstrative de laborator, fiind utile şi la rezolvarea temelor de casă. Cursul urmăreşte a) descrierea fenomenelor vibratorii întâlnite în practica inginerească; b) modelarea sistemelor vibratoare şi analiza acestora cu metoda elementelor finite; şi c) înarmarea studenţilor cu baza fizică necesară în modelarea analitică şi numerică a structurilor în vibraţie şi a maşinilor, pentru elaborarea soluţiilor inginereşti ale problemelor de vibraţii.

În volumul al doilea se vor prezenta vibraţiile autoîntreţinute, metode de calcul pentru probleme de valori proprii de ordin mare, estimarea pametrilor sistemelor vibratoare pe baza analizei funcţiilor răspunsului în frecvenţă, analiza modală experimentală şi încercările la vibraţii. Nu se tratează dinamica sistemelor rotor-lagăre şi vibraţiile discurilor şi paletelor, acestea fiind studiate în cadrul cursului de *Dinamica maşinilor*.

Decembrie 2008 Mircea Radeş

Cuprins

Prefață **i**

Cuprins **iii**

1. Modelarea sistemelor vibratoare **1**

1.1 Vibrații şi oscilații 1

1.2 Sisteme discrete şi sisteme continue 2

1.3 Sisteme cu un grad de libertate 3

1.4 Mişcări vibratorii 4

1.5 Amortizarea vibrațiilor 6

2. Sisteme cu un grad de libertate **9**

2.1 Vibrații libere neamortizate 9

2.1.1 Sistemul masă-arc 9

2.1.2 Rigiditatea elementelor elastice 11

2.1.3 Sisteme torsionale 13

2.1.4 Metoda energetică 15

2.1.5 Metoda lui Rayleigh 16

2.2 Vibrații forțate neamortizate 20

2.2.1 Excitarea masei cu o forță arbitrară 20

2.2.2 Excitarea masei cu o forță armonică 21

2.2.3 Bătăi 23

2.2.4 Curbe de răspuns în frecvență 24

2.2.5 Rezonanța 25

2.2.6 Trecerea prin rezonanță 27

2.2.7 Rezonanța cu amplitudine constantă a deplasării 27

2.2.8 Excitația cu mase excentrice în rotație 28

2.2.9 Antirezonanța 29

2.2.10 Transmisibilitatea 30

2.2.11 Turația critică a rotorului Laval 31

2.3 Vibrații libere amortizate 33
2.3.1 Amortizarea vâscoasă 34
2.3.2 Decrementul logaritmic 37
2.3.3 Factorul de pierderi 40
2.4 Vibrații forțate amortizate 40
2.4.1 Vibrații staționare cu amortizare vâscoasă 41
2.4.2 Diagrama deplasare-forță 44
2.4.3 Amortizarea structurală 46
2.4.4 Metoda punctelor de semi-putere 47
2.4.5 Metoda masei adiționale 49
2.4.6 Rezolvarea prin algebra complexă 50
2.4.7 Funcțiile răspunsului în frecvență 51
2.4.8 Diagrama polară a receptanței pentru amortizare vâscoasă 55
2.4.9 Transmisibilitatea în sisteme amortizate 59
2.4.10 Teoria captorilor seismici 60
2.4.11 Precesia rotorului Laval cu amortizare externă 64
2.4.12 Amortizarea ereditară 66
2.5 Sisteme cu rigiditate cubică 71
2.5.1 Rigiditatea cubică 72
2.5.2 Răspunsul armonic 72
2.5.3 Curbele răspunsului în frecvență 74
2.5.4 Fenomene de salt 79
2.6 Vibrații tranzitorii 80
2.6.1 Răspunsul la forțe impulsive aplicate masei 80
2.6.2 Răspunsul la excitație prin șoc aplicată suportului 88
2.6.3 Spectrul răspunsului la șoc 92
Probleme 94
3. Sisteme cu două grade de libertate 99
3.1 Vibrații de translație 100
3.1.1 Ecuațiile de mișcare 100
3.1.2 Vibrații libere. Moduri proprii de vibrație 101
3.1.3 Ortogonalitatea modurilor proprii 105
3.1.4 Coordonate modale 106
3.1.5 Răspunsul la excitație armonică 108

3.2 Vibraţii de torsiune 113
3.2.1 Ecuaţiile de mişcare 113
3.2.2 Sistemul disc-arbore-disc 114
3.2.3 Sisteme cu roţi dinţate 120
3.2.4 Sisteme ramificate 122
3.3 Vibraţii de încovoiere 124
3.3.1 Flexibilităţi (coeficienţi de influenţă) 124
3.3.2 Ecuaţiile de mişcare 126
3.3.3 Modurile proprii de vibraţie 127
3.3.4 Vibraţiile libere 129
3.3.5 Răspunsul la excitaţie armonică 135
3.4 Vibraţii cuplate de translaţie şi rotaţie 139
3.4.1 Ecuaţiile de mişcare 139
3.4.2 Modurile proprii de vibraţie 141
3.5 Pendule cuplate elastic 145
3.5.1 Ecuaţiile de mişcare 145
3.5.2 Modurile proprii de vibraţie 146
3.5.3 Vibraţii libere 147
3.6 Sisteme amortizate 150
3.6.1 Amortizarea vâscoasă proporţională 150
3.6.2 Vibraţii libere amortizate 151
3.6.3 Răspunsul la excitaţie armonică 155
3.6.4 Amortizorul vâscos neacordat 162
3.6.5 Absorbitorul de vibraţii amortizat 164
3.6.6 Amortizarea vâscoasă neproporţională 173
Probleme 180
4. Sisteme cu mai multe grade de libertate 185
4.1 Sisteme cu mase concentrate 186
4.1.1 Bare cu mase concentrate 186
4.1.2 Structuri multietajate forfecate 195
4.1.3 Sisteme torsionale 197
4.1.4 Structuri cu subsisteme repetate 204
4.1.5 Sisteme discrete cu mai multe mase 206

4.2 Structuri plane din bare articulate 212
4.2.1 Coordonate şi funcţii de formă pentru elementul *truss* 212
4.2.2 Matricile elementului în coordonate locale 214
4.2.3 Transformarea din coordonate locale în coordonate globale 215
4.2.4 Matricile elementului în coordonate globale 217
4.2.5 Asamblarea matricilor de rigiditate şi de masă 218
4.2.6 Ecuaţiile de mişcare şi problema de valori proprii 220
4.3 Cadre plane 222
4.3.1 Analiza statică a unei grinzi de secţiune constantă 222
4.3.2 Discretizarea cu elemente finite 223
4.3.3 Funcţii de formă statice pentru elementul de grindă 225
4.3.4 Matricea de rigiditate a unui element de grindă 227
4.3.5 Matricea de masă coerentă a elementului de grindă 229
4.3.6 Eforturi axiale 230
4.3.7 Matricile unui element de cadru în coordonate locale 230
4.3.8 Transformarea coordonatelor 231
4.3.9 Matricile elementului de cadru în coordonate globale 232
4.3.10 Asamblarea matricilor de rigiditate şi de masă 233
4.4 Grilaje 236
4.4.1 Discretizarea cu elemente finite 236
4.4.2 Matricile elementului de grilaj în coordonate locale 237
4.4.3 Transformarea coordonatelor 239
4.4.4 Matricile elementului de grilaj în coordonate globale 240
4.5 Funcţii de răspuns în frecvenţă 243
4.5.1 Matricea FRF 243
4.5.2 Diagramele FRF 244
Probleme 249
5. Sisteme continue 261
5.1 Vibraţiile laterale ale barelor zvelte 261
5.1.1 Ecuaţia diferenţială a mişcării 261
5.1.2 Modurile proprii de vibraţie 263
5.1.3 Ortogonalitatea funcţiilor proprii 269
5.1.4 Grinzi continue 271
5.1.5 Condiţii la limită naturale 273

5.1.6 Răspunsul la excitație armonică 280
5.2 Vibrațiile longitudinale ale barelor 285
5.3 Vibrațiile torsionale ale barelor 288
5.4 Grinzi Timoshenko 290
6. Unde elastice 291
6.1 Propagarea undelor 291
6.2 Unde longitudinale în bare prismatice 294
6.2.1 Ecuația undelor. Soluția lui d'Alembert 294
6.2.2 Unde armonice 297
6.2.3 Unde în bara de lungime finită 302
6.2.4 Propagarea energiei prin unde 304
6.2.5 Atenuarea undelor 306
6.3 Unde transversale în bare prismatice 310
6.3.1 Viteza de fază și viteza de grup 310
6.3.2 Unde în bara rezemată pe mediu elastic 314
6.4 Unde în medii elastice 316
6.4.1 Ecuațiile undelor în trei dimensiuni 316
6.4.2 Unde longitudinale și unde transversale 318
6.4.3 Unde Rayleigh 321
6.4.4 Unde Love 327
6.5 Unde ghidate în plăci 333
6.5.1 Unde Lamb în plăci 333
6.5.2 Unde Love în plăci 337
Bibliografie 339
Index 347

1.
MODELAREA SISTEMELOR VIBRATOARE

Vibraţiile sunt fenomene dinamice întâlnite în activitatea curentă, de la bătăile inimii, alergatul şi mersul pe jos, legănatul copacilor în bătaia vântului şi trepidaţiile clădirilor la cutremure, la vibraţiile instrumentelor muzicale, ale perforatoarelor pneumatice şi benzilor transportoare oscilante.

De cele mai multe ori "vibraţii" sunt denumite mişcările nedorite care produc zgomote sau solicitări mecanice relativ mari. În acest caz interesează în special efectul vibraţiilor asupra omului, maşinilor şi clădirilor. Modelarea fenomenelor vibratorii implică definirea structurii şi parametrilor corpurilor în vibraţie, a funcţiilor care descriu excitaţia şi a nivelelor răspunsului dinamic.

Acest capitol introductiv cuprinde definiţii şi clasificări, necesare pentru o imagine generală a principalelor noţiuni utilizate în studiul vibraţiilor.

1.1 Vibraţii şi oscilaţii

Conform "*Dicţionarului explicativ al limbii române*" (*DEX*–1998), *vibraţia* este o "mişcare periodică a unui corp sau a particulelor unui mediu, efectuată în jurul unei poziţii de echilibru". *Oscilaţia* este "variaţia periodică în timp a valorilor unei mărimi care caracterizează un sistem fizic, însoţită de o transformare a energiei dintr-o formă în alta".

Oscilaţiile – de natură mecanică, termică, electromagnetică etc. – sunt fenomene dinamice caracterizate prin variaţia în timp a unei *mărimi de stare* a sistemului, de obicei în vecinătatea valorii corespunzătoare unei stări de echilibru.

Vibraţiile sunt *oscilaţii ale sistemelor elastice*, adică mişcări ale sistemelor mecanice datorite unei forţe de readucere elastice. Astfel o bară elastică sau o coardă vibrează, în timp ce un pendul oscilează.

Toate corpurile care au masă şi elasticitate pot vibra. Un sistem vibrator are atât *energie cinetică*, înmagazinată în masa în mişcare, cât şi *energie*

potențială, înmagazinată în elementul elastic ca *energie de deformație*. În timpul vibrațiilor, are loc o transformare ciclică a energiei potențiale în energie cinetică şi invers.

Într-un sistem conservativ, în care nu există disipare de energie, energia mecanică totală este constantă. În poziția de amplitudine maximă a deplasării, viteza instantanee este zero, sistemul are numai energie potențială. În poziția de echilibru static, energia de deformație este nulă iar sistemul are numai energie cinetică. Energia cinetică maximă este egală cu energia de deformație maximă. Egalând cele două energii se poate calcula frecvența proprie fundamentală de vibrație. Acesta este principiul *metodei lui Rayleigh*.

Sistemele vibratoare sunt supuse *amortizării* datorită pierderii de enegie prin disipare sau radiație. Amortizarea produce descreşterea amplitudinii vibrațiilor libere, defazajul între excitație şi răspuns, precum şi limitarea amplitudinii răspunsului forțat al sistemelor vibratoare.

1.2 Sisteme discrete şi sisteme continue

Numărul gradelor de libertate ale unui sistem vibrator este egal cu numărul coordonatelor *independente* necesare pentru a defini complet configurația instantanee a sistemului.

Rezultă că pentru a defini mişcarea tuturor particulelor unui sistem, numărul gradelor de libertate ar trebui să fie infinit. Totuşi, în probleme practice, se utilizează sisteme similare din punct de vedere dinamic, cu număr redus de grade de libertate.

Criteriile prin care se stabileşte numărul gradelor de libertate ale unui sistem se bazează pe considerente practice. Astfel, unele dintre mişcările posibile ale sistemului pot fi atât de mici încât să nu prezinte interes. Grupuri de particule cu mişcări practic similare pot fi considerate corpuri rigide, ceea ce permite reducerea numărului coordonatelor necesare pentru descrierea mişcării. Domeniul frecvențelor forțelor excitatoare poate fi atât de îngust încât numai una sau câteva dintre frecvențele proprii pot da naştere la rezonanțe.

Aceste considerații conduc la conceptul de *mase concentrate* care sunt corpuri rigide conectate prin elemente elastice cu masa neglijabilă. Mişcările descrise de astfel de *sisteme discrete* sau *cu parametri concentrați* sunt adesea aproximări suficient de bune ale vibrațiilor reale pentru a satisface cerințele practice, oferind date utile proiectării şi valori privind limitele admisibile ale vibrațiilor.

Atunci când elementele deformabile au mase distribuite comparabile cu masele componentelor modelate prin corpuri rigide, aproximarea se poate

îmbunătăţi ţinând cont de masa elementelor elastice. Deobicei masa proprie este concentrată într-un număr arbitrar de puncte, în funcţie de gradul de aproximare dorit.

Există însă multe elemente de maşini şi structuri cu formă atât de simplă încât pot fi considerate sisteme cu număr infinit de grade de libertate. Astfel de *sisteme continue* sau *cu parametri distribuiţi* pot fi modelate ca bare, fire, plăci, membrane, învelişuri sau combinaţii ale acestora.

În aplicaţiile inginereşti, structurile cu formă complicată sunt înlocuite prin modele matematice discrete. O metodă eficientă de discretizare este *metoda elementelor finite*. Sistemul cu număr infinit de grade libertate este înlocuit cu un sistem discret care are aceeaşi comportare dinamică. Structura reală este divizată (ipotetic) în subdomenii bine definite (elemente finite) care sunt atât de mici încât forma funcţiei câmpului de deplasări poate fi aproximată destul de precis, urmând să se determine doar mărimea acesteia. Elementele individuale sunt apoi asamblate astfel încât deplasările lor sunt compatibile la nodurile elementelor şi în câteva puncte la interfaţa lor, tensiunile interne sunt în echilibru cu forţele aplicate reduse la noduri, şi condiţiile la limită sunt satisfăcute. Erorile de modelare înclud alegerea unui tip neadecvat de element, funcţii de formă incorecte, reazeme nepotrivite şi o reţea de discretizare grosieră.

1.3 Sisteme cu un grad de libertate

Un număr surprinzător de mare de probleme de vibraţii care apar în practica inginerească pot fi rezolvate cu o precizie acceptabilă modelând sistemul real ca un corp rigid rezemat elastic, a cărui mişcare poate fi descrisă de o singură coordonată.

Cel mai simplu sistem vibrator constă din corpul a cărui mişcare este studiată şi mediul înconjurător, faţă de care se măsoară mişcarea. Analiza acestui sistem simplificat parcurge patru etape. În *prima* etapă se stabileşte partea sistemului care reprezintă corpul rigid şi cea care reprezintă elementele deformabile. În etapa *a doua* se calculează parametrii dinamici ai corpului rigid şi ai elementelor elastice. În etapa *a treia* se scriu ecuaţiile de mişcare ale sistemului echivalent. Etapa *a patra* constă din rezolvarea ecuaţiilor de mişcare în condiţiile date pentru vibraţii libere sau forţate. În ultimele două etape se pot utiliza metode diferite, bazate pe expresiile energiilor cinetică şi potenţială ale sistemului.

Primele două etape implică discernământ şi experienţă, care se dobândesc în practică, în procesul alegerii sistemelor echivalente, definirii mişcării acestora şi comparării predicţiilor cu rezultatele măsurărilor pe sistemele reale. Verificarea şi validarea modelelor pot impune reactualizarea parametrilor sistemului sau chiar a structurii modelului. Adecvarea soluţiei depinde în mare măsură de priceperea cu

care se aleg ipotezele simplificatoare de bază. Opțiunea principală este între un model liniar şi un model neliniar. Alegerea tipului amortizării poate fi o sursă de erori, deoarece amortizarea nu poate fi calculată la fel ca masa şi rigiditatea.

Ultimele două etape constau din aplicarea unor proceduri stabilite de matematicieni. Activitatea inginerească propriu-zisă se limitează la primele două etape, în timp ce ultimele două etape pot fi considerate ca aplicări directe ale unor rețete de calcul.

În capitolul 2 se studiază sisteme cu un grad de libertate. Sistemele discrete sunt analizate în capitolele 3 şi 4. Capitolul 5 este dedicat vibrațiilor barelor iar capitolul 6 este o introducere în studiul propagării undelor în bare şi medii elastice infinite.

1.4 Mişcări vibratorii

În funcție de cauza care produce sau susține mişcarea vibratorie, se pot distinge: a) *vibrații libere*, produse de un impact sau o deplasare inițială; b) *vibrații forțate*, produse de forțe exterioare sau excitații cinematice; c) *vibrații parametrice* – datorite variației, produse de o cauză externă, a unui parametru al sistemului; şi d) *vibrații autoexcitate* – produse de un mecanism inerent în sistem, prin conversia unei energii obținute de la o sursă de energie constantă în timp.

Un sistem elastic scos din poziția de echilibru stabil, apoi lăsat liber, efectuează *vibrații libere*. În prezența unor forțe de frecare, energia mecanică este disipată, iar vibrația este amortizată după un număr oarecare de cicluri. Frecvențele vibrațiilor libere depind de masa, rigiditatea şi amortizarea din sistem, fiind independente de condițiile inițiale ale mişcării sau de forțe exterioare sistemului. De aceea se numesc *frecvențe proprii* sau frecvențe naturale de vibrație. Inversele acestora se numesc *perioade proprii* de vibrație. Pentru un anumit sistem, ele au valori constante bine definite. Când toate particulele unui corp vibrează într-o mişcare armonică sincronă, deformata dinamică este definită de o *formă proprie de vibrație*.

Vibrațiile forțate (întreținute) sunt produse de forțe perturbatoare care există independent de mişcare. În general, sarcinile exterioare sau deplasările sunt aplicate dinamic, deci sunt variabile în timp. Astfel de excitații implică un transfer de energie de la sursa perturbatoare periodică la sistem. Dacă transferul are loc periodic, constant pe fiecare ciclu, vibrația forțată este *staționară*, de amplitudine constantă. Dacă transferul se face neuniform, vibrația are caracter *tranzitoriu*, amplitudinea variind până la stabilirea unui regimn staționar sau până la amortizarea completă.

Aplicarea bruscă a unei perturbații produce şocuri sau impacturi. *Şocul* este o perturbație prin care se transmite sistemului energie cinetică într-un interval de

timp scurt în comparație cu perioada sa proprie de oscilație. Răspunsul la un șoc este deci, din momentul încetării acțiunii, o vibrație liberă. *Excitația tranzitorie* este o perturbație care durează mai multe perioade de vibrație proprie ale sistemului.

Vibrațiile periodice şi cele tranzitorii sunt fenomene deterministe, pentru care se pot stabili funcții de timp care să definească în orice moment valoarea instantanee a deplasării. În multe aplicații practice se întâlnesc vibrații *aleatoare*, cu caracter nedeterminist, la care valorile instantanee ale mărimilor care definesc mişcarea nu mai sunt predictibile. Se recurge la calculul probabilităților şi se lucrează cu mărimi statistice sau valori medii, care în cazul proceselor staționare, ergodice şi cu distribuție gaussiană devin predictibile.

În general, când asupra unui sistem liniar şi cu parametri invariabili în timp se aplică o perturbație oarecare, mişcarea rezultantă este suma a două componente distincte: *vibrația forțată*, descrisă de o funcție asemănătoare funcției excitației şi *vibrația proprie*, dependentă doar de caracteristicile dinamice ale sistemului, a cărei funcție de timp este de obicei o combinație între o sinusoidă şi o exponențială.

În cazul unei perturbații armonice sau aleatoare staționare, vibrația proprie se amortizează imediat după începutul mişcării, rămânând doar vibrația forțată, care în anumite condiții poate produce *rezonanță*.

Dacă un sistem este acționat de o forță exterioară periodică, a cărei frecvență este egală cu (sau apropiată de) una din frecvențele proprii ale sistemului, vibrația produsă are amplitudini relativ mari chiar pentru amplitudini relativ mici ale forței perturbatoare. Se spune că sistemul este într-o stare de *rezonanță*. Un exemplu este leagănul împins la anumite intervale. Alte exemple includ vibrațiile sistemelor cu roți dințate la frecvența de angrenare, vibrațiile torsionale ale arborilor motoarelor cu ardere internă la frecvența aprinderilor din cilindri, vibrațiile rulmenților la frecvența trecerii bilelor peste un defect, etc.

Rezonanța ia naştere la frecvențele la care suma celor două energii "reactive" recuperabile – potențială şi cinetică – este nulă, iar energia transmisă sistemului este egală cu energia disipată prin frecări. Fenomenul apare când spectrul de frecvențe al excitației acoperă un domeniu ce cuprinde frecvențele proprii ale sistemului.

La rezonanță o forță de amplitudine constantă produce un răspuns maxim, sau, pentru a menține un răspuns de amplitudine constantă, este necesară o forță minimă.

Rezonanța înseamnă amplitudini mari ale mişcării în anumite puncte sau părți ale sistemului în vibrație, însoțite de solicitări şi tensiuni mari sau mişcări relative considerabile, care pot duce la ruperi prin oboseală, funcționare necorespunzătoare, uzură, trepidații, deci zgomot – cu acțiune nocivă aspra omului.

O rezonanță este definită de o frecvență, un nivel al răspunsului dinamic şi o lățime a curbei de răspuns în frecvență. Evitarea regimurilor periculoase de vibrații din vecinătatea rezonanțelor se poate face prin: a) modificarea frecvențelor excitatoare; b) modificarea masei sau rigidității sistemului vibrator, pentru variația frecvențelor proprii; c) creşterea sau adăugarea amortizării, şi d) ataşarea unui absorbitor dinamic de vibrații.

Dacă mişcarea are loc în prezența unei surse de energie, pot apare *autovibrații* (vibrații autoexcitate). Mişcarea este întreținută de o forță periodică, creată sau determinată de mişcarea însăşi, deşi energia este furnizată în mod uniform de sursa exterioară. Când mişcarea se opreşte, forța periodică dispare. Exemple cunoscute sunt vibrațiile corzii de vioară produse de arcuş, "scârțâitul" cretei pe tablă sau al balamalei unei uşi, "țiuitul" maşinilor unelte când sculele sunt ascuțite necorespunzător, "fluieratul" tramvaiului la curbe, vibrațiile liniilor electrice aeriene produse de vânt, etc.

În timpul vibrațiilor *la rezonanță* şi al celor *autoexcitate*, sistemul vibrează la o frecvență proprie. În primul caz vibrațiile sunt forțate, deci au loc la frecvența excitatoare (sau multipli întregi ai acesteia, în cazul sistemelor neliniare). În al doilea caz, frecvența este independentă de orice stimul exterior.

Vibrațiile *parametrice* sunt produse de variația unui parametru dinamic al sistemului, rigiditatea sau inerția. Exemple sunt vibrațiile transversale ale rotoarelor de secțiune necirculară, pendulelor de lungime variabilă, sistemelor torsionale cu roți dințate, etc.

1.5 Amortizarea vibrațiilor

Amortizarea reprezintă disiparea energiei mecanice dintr-un sistem, deobicei prin transformare în energie termică. Pierderea energiei prin radiație, uneori definită ca amortizare geometrică, nu este tratată în această lucrare.

Mecanismele de amortizare frecvent utilizate sunt: a) frecarea uscată (coulombiană), în care amplitudinea forței de amortizare este independentă de viteză, b) amortizarea vâscoasă liniară, la care forța este proporțională cu viteza, c) amortizarea vâscoasă proporțională cu o putere a vitezei, şi d) amortizarea structurală (histeretică, internă) în care forța este proporțională cu deplasarea. Amortizarea ereditară şi cea dintre piesele cu jocuri sunt alte modele posibile.

Amortizarea coulombiană sau amortizarea prin frecare uscată este un mecanism de amortizare neliniară, produs de forțe de frecare care se opun mişcării. Forța de amortizare coulombiană are amplitudine constantă, fiind independentă de viteză, odată ce s-a depăşit forța de frecare statică inițială. Energia disipată într-un ciclu de vibrație armonică este proporțională cu amplitudinea deplasării şi independentă de pulsație.

Amortizarea vâscoasă liniară este produsă de frecarea relativă a moleculelor unui fluid vâscos, care produce forțe proporționale şi de sens contrar vitezei unui obiect care se mişcă în fluid. Energia disipată într-un ciclu de vibrație armonică este proporțională cu frecvența şi cu pătratul amplitudinii deplasării. Este cel mai simplu model de amortizare, frecvent utilizat datorită simplității matematice, în special pentru modelarea amortizării externe, produse de mişcarea în mediul ambiant.

Amortizoarele cu ulei din suspensia automobilelor şi motocicletelor produc forțe proporționale cu o putere a vitezei relative. *Amortizarea proporțională cu o putere a vitezei* este un mecanism neliniar, în care energia disipată într-un ciclu de vibrație armonică depinde atât de pulsație cât şi de amplitudinea vibrației.

S-a observat experimental că la multe materiale folosite curent în practică energia disipată într-un ciclu de vibrație armonică este proporțională cu pătratul amplitudinii deplasării dar este independentă de pulsație, deci modelul amortizării vâscoase liniare nu descrie corect comportarea acestor materiale. Aceeaşi constatare priveşte amortizarea produsă de mişcarea relativă a elementelor asamblate prin nituire sau cu şuruburi.

Amortizarea structurală sau *histeretică* este mecanismul de frecare de alunecare care descrie această comportare. Forța de amortizare este proporțională cu deplasarea relativă dar în fază cu viteză relativă. Acest model de frecare a fost postulat şi este strict valabil doar în cazul vibrațiilor armonice. El nu reprezintă un mecanism de disipare a energiei realizabil fizic, deoarece în cazul solicitării în regim tranzitoriu conduce la rezultate absurde. În acest caz, valoarea instantanee a forței de amortizare depinde nu numai de variația în timp a deplasării până în momentul aplicării forței, dar şi după acest moment (sistem necauzal). Totuşi, în regim armonic şi pe domenii limitate de frecvențe, modelul amortizării structurale dă rezultate bune, confirmate experimental pe structuri aeronautice.

Natura fizică a mecanismelor de amortizare este atât de diferită, încât pentru descrierea lor s-au elaborat mai multe modele matematice, majoritatea fiind neliniare, deci implicând dificultăți de calcul. S-a recurs la conceptul de *amortizare vâscoasă echivalentă*, prin care forța de amortizare neliniară se înlocuieşte cu o forță vâscoasă liniară, astfel încât energia disipată pe ciclu de amortizorul neliniar să fie egală cu cea disipată de un amortizor vâscos echivalent, supus la o deplasare relativă de aceeaşi amplitudine.

Generalizând noțiunea de amortizare echivalentă, calculul analitic al vibrațiilor mecanice este simplificat prin folosirea cu precădere a două modele de amortizare – vâscoasă şi structurală. Se egalează deci energia disipată într-un ciclu de vibrație prin toate mecanismele de amortizare, inclusiv cea datorită radiației (prin unde, în medii continue infinite), cu energia disipată printr-un singur mecanism, vâscos sau histeretic, într-un regim de vibrații cu aceeaşi amplitudine. Rezultă astfel fie un *coeficient de amortizare vâscoasă echivalentă*, fie un *coeficient de amortizare structurală echivalentă*, mărimi dependente în general de

pulsație și amplitudinea deplasării, cu care se lucrează ca și când ar fi constante, urmând să se determine experimental domeniile în care această ipoteză este valabilă.

2.
SISTEME CU UN GRAD DE LIBERTATE

Sistemele vibratoare au masă şi elasticitate. Cel mai simplu sistem vibrator constă dintr-o masă ataşată de un arc liniar. Când mişcarea poate fi descrisă de o singură coordonată, sistemul are un singur grad de libertate. Utilizând acest model simplu, se pot introduce concepte de bază ca frecvența proprie, rezonanța, bătăile şi antirezonanța. În timpul vibrațiilor, energia mecanică se disipează prin amortizare. Aceasta limitează amplitudinea mişcării la rezonanță, descreşte amplitudinea vibrațiilor libere, şi introduce defazaje între răspuns şi excitație. Măsurarea amortizării este importantă deoarece ea nu poate fi calculată ca celelalte două proprietăți, masa şi rigiditatea.

2.1 Vibrații libere neamortizate

Vibrația liberă a unui sistem masă-arc, care are loc în absența oricărei excitații exterioare, este o *mişcare armonică* a cărei frecvență depinde exclusiv de masa şi rigiditatea sistemului, fiind independentă de condițiile inițiale ale mişcării. Fiind o proprietate intrinsecă (naturală) a sistemului, aceasta se numeşte *frecvență proprie* sau *frecvență naturală*. Calculul frecvențelor proprii se bazează pe valorile maselor şi ale rigidităților elementelor elastice.

2.1.1 Sistemul masă-arc

Sistemul din fig. 2.1 constă dintr-un arc liniar de rigiditate k şi o greutate W având masa $m = W/g$, unde g este accelerația gravitației. Greutatea este constrânsă să se deplaseze pe direcție verticală, fără să se rotească. Rigiditatea k este egală cu forța care produce o variație a lungimii arcului egală cu unitatea.

În fig. 2.1, *a* se arată arcul netensionat. Când masa m este ataşată arcului (fig. 2.1, *b*), capătul acestuia se deplasează în jos şi se opreşte în poziția de echilibru static, determinată de deformația statică δ_{st}. În această poziție, greutatea

$W = mg$ care acționează în jos este echilibrată de forța din arc $k\delta_{st}$ care acționează în sus (fig. 2.1, *c*), astfel încât săgeata statică este

$$\delta_{st} = \frac{m\,g}{k}. \qquad (2.1)$$

Dacă masa este deplasată din poziția de echilibru static şi lăsată liber, sistemul efectuează vibrații libere. Pentru a scrie ecuația mișcării, originea deplasărilor dinamice se alege în poziția de echilibru static, astfel încât trebuie luate în considerare doar forțele datorite deplasării față de această poziție.

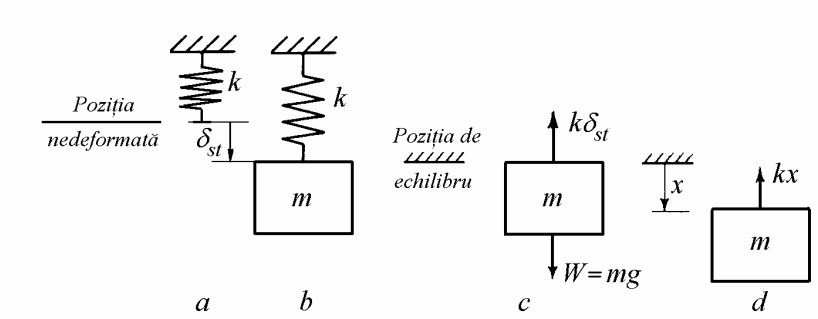


Fig. 2.1

Alegând sensul pozitiv în jos, forța elastică ce acționează asupra masei în poziția *x* este $-k\,x$ (fig. 2.1, *d*). Mișcarea masei este descrisă de legea a doua a lui Newton

$$m\,\ddot{x} = -k\,x,$$

care poate fi scrisă

$$m\,\ddot{x} + k\,x = 0, \qquad (2.2)$$

unde un punct deasupra literei denotă derivarea în raport cu timpul.

Relația (2.2) este o ecuație diferențială de ordinul doi, omogenă. Soluția generală are forma

$$x = C_1 \sin \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t, \qquad (2.3)$$

unde

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \qquad \text{[rad/s]} \qquad (2.4)$$

este *pulsația proprie neamortizată* a sistemului.

Frecvența proprie neamortizată este

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad \text{[Hz]} \qquad (2.5)$$

Constantele arbitrare C_1 şi C_2 se determină pe baza condiţiilor iniţiale ale mişcării. În cazul general, sistemul poate porni din poziţia x_0 cu viteza v_0, astfel încât soluţia generală devine

$$x = \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + x_0 \cos \omega_n t \,. \tag{2.6}$$

O altă formă a soluţiei generale este

$$x = A \sin\left(\omega_n t + \phi\right), \tag{2.7}$$

unde cele două constante arbitrare sunt date de

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(v_0/\omega_n\right)^2} \,, \qquad \phi = \operatorname{arctg} \frac{\omega_n x_0}{v_0} \,. \tag{2.8}$$

Expresia (2.7) arată că vibraţia liberă a sistemului masă-arc este armonică şi are loc la frecvenţa proprie f_n. Mărimea A reprezintă *amplitudinea* deplasării faţă de poziţia de echilibru static iar ϕ este *unghiul de fază*. Pulsaţia ω_n defineşte frecvenţa vibraţiei în radiani pe secundă, 2π radiani corespunzând unui ciclu complet de vibraţie.

Frecvenţa vibraţiei este egală cu numărul de cicluri de mişcare în unitatea de timp. Inversul frecvenţei proprii este perioada proprie de vibraţie

$$T = 1/f_n = 2\pi/\omega_n \,. \qquad \text{[sec]} \tag{2.9}$$

Perioada vibraţiei este egală cu timpul necesar mişcării să se repete.

Frecvenţa proprie neamortizată se poate exprima în funcţie de săgeata statică utilizând relaţia (2.1)

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \,, \qquad \text{[Hz]} \tag{2.10}$$

unde $g = 9{,}81 \mathrm{m/s^2}$ este acceleraţia gravitaţiei.

2.1.2 Rigiditatea elementelor elastice

Deşi sistemul cu un grad de libertate este deobicei modelat printr-o masă ataşată de un arc cilindric elicoidal, în multe sisteme practice elementul elastic poate lua diferite forme sau poate consta din mai multe arcuri legate între ele.

În fig. 2.2 rigidităţile mai multor elemente elastice au fost calculate ca raport între forţa aplicată şi deplasarea punctului ei de aplicaţie.

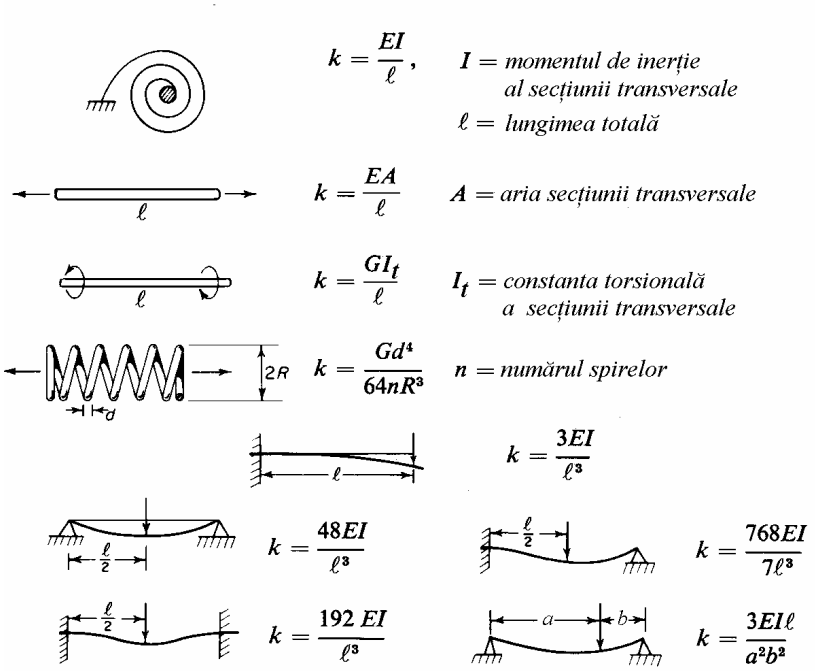


Fig. 2.2

În fig. 2.3 se prezintă două tipuri generale de combinații de arcuri.

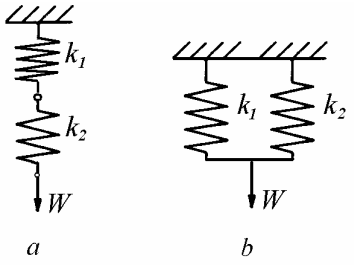


Fig. 2.3

La legarea în serie (fig. 2.3, *a*), în ambele arcuri acționează aceeaşi forță. Două arcuri liniare, de rigidități k_1 şi k_2, acționate de greutatea W, se deformează static

$$\delta_{st} = \frac{W}{k_1} + \frac{W}{k_2} = W\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right).$$

Rigiditatea echivalentă, reprezentând efectul combinat al arcurilor k_1 şi k_2, este

$$k_S = \frac{W}{\delta_{st}} = \frac{1}{\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}}. \tag{2.11}$$

Un sistem cu *n* arcuri legate în serie are o rigiditate echivalentă k_S dată de

$$\frac{1}{k_S} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + ... + \frac{1}{k_n}. \tag{2.12}$$

La legarea în paralel (fig. 2.3, *b*) deformaţia ambelor arcuri este aceeaşi iar suma forţelor din arcuri este egală cu greutatea aplicată W:

$$W = k_1 \delta_{st} + k_2 \delta_{st}.$$

Astfel, pentru arcuri legate în paralel, rigiditatea echivalentă este

$$k_P = \frac{W}{\delta_{st}} = k_1 + k_2. \tag{2.13}$$

În general, un sistem cu *n* arcuri în paralel are o rigiditate echivalentă

$$k_P = k_1 + k_2 + ... + k_n. \tag{2.14}$$

Regulile de compunere a rigidităţilor arcurilor sunt aceleaşi cu cele utilizate la calculul capacităţii totale a condensatoarelor legate în serie sau în paralel în circuitele electrice.

2.1.3 Sisteme torsionale

Se consideră sistemul torsional din fig. 2.4 care constă dintr-un disc cu un moment de inerţie masic *J,* $\mathrm{kg\,m^2}$, ataşat de o bară sau un fir de rigiditate la răsucire *K,* $\mathrm{N\,m/rad}$. Sistemul este constrâns să efectueze vibraţii unghiulare în jurul axei verticale.

Dacă poziţia instantanee a discului este dată de unghiul θ, cuplul care acţionează asupra discului este $-K\theta$ astfel încât legea a doua a lui Newton pentru mişcarea unghiulară este

$$J\ddot{\theta} = -K\theta,$$

care se mai scrie

$$J\ddot{\theta} + K\theta = 0\,, \tag{2.15}$$

unde un punct deasupra literei denotă derivare în raport cu timpul.

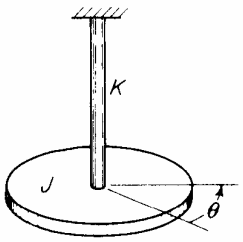


Fig. 2.4

Ecuaţia (2.15) a fost stabilită de Ch. O. Coulomb în 1784. Soluţia generală are forma

$$\theta(t) = C_1 \sin \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t\,,$$

unde

$$\omega_n = \sqrt{K/J} \qquad \text{[rad/s]} \tag{2.16}$$

este *pulsaţia proprie neamortizată* a sistemului torsional.

Frecvenţa proprie neamortizată este

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{J}}\,. \qquad \text{[Hz]} \tag{2.17}$$

Din *Rezistenţa materialelor* se ştie că o bară de diametru *d* şi lungime ℓ, dintr-un material cu modulul de elasticitate transversal *G,* solicitată de un moment M_t se răsuceşte cu un unghi $\theta = \dfrac{M_t \ell}{G I_p}$, unde $I_p = \dfrac{\pi d^4}{32}$ este momentul de inerţie polar al secţiunii transversale a barei. Rigiditatea la răsucire (torsională) este deci $K = \dfrac{M_t}{\theta} = \dfrac{G I_p}{\ell}$.

Există o analogie directă între sistemele în vibraţii de translaţie şi cele în vibraţii torsionale. Arcurile şi masele din primul caz sunt înlocuite de arcuri torsionale şi discuri rigide care au moment de inerţie masic polar.

2.1.4 Metoda energetică

Dacă vibrația este armonică, atunci frecvența poate fi calculată printr-o metodă energetică. Când nu există disipare de energie, sistemul se numeşte *conservativ*. În orice moment, energia unui sistem conservativ este suma constantă a energiilor potențială şi cinetică

$$U + T = const. \tag{2.18}$$

Energia potențială maximă, care apare în poziția de elongație maximă, unde masa stă pe loc un moment, trebuie să egaleze energia cinetică maximă, care apare atunci când masa trece prin poziția de echilibru static, cu viteză maximă.

Forța din arc este kx, iar lucrul mecanic efectuat pe o deplasare infinitezimală dx este $kx\,\mathrm{d}x$. Energia potențială din arc, acumulată când un capăt al acestuia este deplasat pe o distanță x, este $U = \int_0^x k\,x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}k\,x^2$. Presupunând o mişcare armonică de forma $x = A\sin\omega_n t$, energia potențială maximă este $U_{max} = \frac{1}{2}k\,A^2$.

Energia cinetică este în orice moment $T = \frac{1}{2}m\,v^2$. Viteza este $v = A\,\omega_n\cos\omega_n t$, astfel că energia cinetică maximă este $T_{max} = \frac{1}{2}m\,\omega_n^2\,A^2$.

Egalând energiile maxime $U_{max} = T_{max}$, rezultă $\frac{1}{2}k\,A^2 = \frac{1}{2}m\,\omega_n^2\,A^2$ de unde se obține pulsația proprie $\omega_n = \sqrt{k/m}$, independentă de amplitudinea A.

Exemplul 2.1

Să se determine pulsația proprie a oscilațiilor fluidului într-un tub în formă de U (fig. 2.5).

Rezolvare. Fie ℓ lungimea totală a coloanei de fluid, A - aria secțiunii transversale a tubului şi ρ - densitatea fluidului.

Presupunând că particulele de fluid au aceeaşi viteză în orice moment, energia cinetică are expresia $T = \frac{1}{2}\rho\,A\,\ell\,\dot{x}^2$. Dacă fluidul oscilează în tub, lucrul mecanic efectuat este acelaşi ca şi când o coloană de fluid de lungime x ar fi transferată din partea stângă în partea dreaptă a tubului, lăsând restul fluidului nemişcat.

Energia potențială instantanee este $U = g\,\rho A x^2$. Înlocuind expresiile celor două energii în condiția ca variația în timp a energiei totale să fie nulă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(T+U\right)=0$$

şi simplificând cu $\dot{x}$, se obține ecuația diferențială a mişcării fluidului

$$\ddot{x}+\frac{2g}{\ell}x=0\,.$$

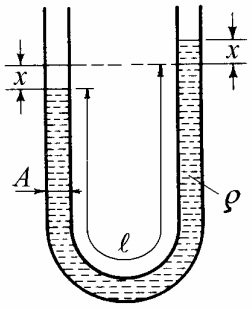


Fig. 2.5

Pulsația proprie

$$\omega_n=\sqrt{2g/\ell}$$

este independentă de natura fluidului utilizat, de forma şi aria secțiunii transversale a tubului.

2.1.5 Metoda lui Rayleigh

Metoda lui Rayleigh este o aplicație a metodei energetice la sisteme cu masă/elasticitate distribuită. Metoda este utilizată pentru a reduce un sistem cu parametri distribuiți la un sistem echivalent masă-arc şi pentru a determina pulsația proprie fundamentală a acestuia.

Energiile cinetică şi potențială se calculează presupunând orice formă deformată care satisface condițiile la limită geometrice. Dacă se alege deformata reală sistemului, atunci formula lui Rayleigh va da pulsația proprie adevărată a sistemului. Pentru orice altă curbă, pulsația dată de această metodă va fi mai mare decât cea corectă. Aceasta se explică prin faptul că orice deviație de la curba adevărată implică nişte constrângeri suplimentare, deci o rigiditate mai mare şi o

pulsație mai înaltă. În continuare, metoda lui Rayleigh este aplicată vibrațiilor de încovoiere ale barelor.

Fie o bară cu modulul de rigiditate la încovoiere EI (unde E este modulul de elasticitate longitudinal şi I este momentul de inerție axial al secțiunii transversale) şi masa pe unitatea de lungime ρA (unde ρ este densitatea materialului şi A este aria secțiunii transversale). Se presupune că deplasarea laterală este armonică, cu frecvența ω_1, sincronă în toate punctele în lungul barei

$$y(x,t) = v(x)\cos\omega_1 t\,.$$

Energia potențială instantanee este

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{1}{2}\int EI\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x$$

unde s-a utilizat ecuația diferențială liniarizată (4.65) a liniei elastice a barei $M = EI\left(\partial^2 y/\partial x^2\right)$.

Valoarea sa maximă este

$$U_{max} = \frac{1}{2}\int EI\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x\,.$$

Energia cinetică instantanee este

$$T = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dm = \frac{1}{2}\omega_1^2\rho A\int y^2\mathrm{d}x\,,$$

cu valoarea maximă

$$T_{max} = \frac{1}{2}\omega_1^2\int \rho A v^2\mathrm{d}x\,.$$

Egalând energia potențială maximă cu energia cinetică maximă, se obține formula lui Rayleigh pentru pulsația proprie fundamentală

$$\omega_1^2 = \frac{\int EI\left(\partial^2 v/\partial x^2\right)^2\mathrm{d}x}{\int \rho A v^2\mathrm{d}x}\,. \qquad (2.19)$$

Exemplul 2.2

Să se determine pulsația proprie fundamentală a barei în consolă din fig. 2.6.

Rezolvare. Se alege forma deformată aproximativă

$$v = v_0\left(1-\cos\frac{\pi x}{2\ell}\right).$$

Această funcţie satisface condiţiile la limită $x=0$, $v=0$, $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x=0$, şi $x=\ell$, $\mathrm{d}^2v/\mathrm{d}x^2=0$, însă nu satisface condiţia $x=\ell$, $\mathrm{d}^3v/\mathrm{d}x^3=0$ (forţă tăietoare nulă), deci este o funcţie admisibilă aproximativă.

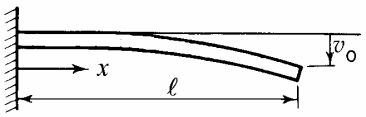


Fig. 2.6

Energia potenţială maximă este $U_{max}=\dfrac{\pi^4}{64}\dfrac{EI}{\ell^3}v_0^2$. Energia cinetică maximă este $T_{max}=\rho A\omega_1^2 v_0^2\,\ell\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{\pi}\right)$, sau $T_{max}=\dfrac{\rho A}{2}\omega_1^2 v_0^2\,\ell\cdot 0{,}23$.

Egalând cele două energii, se obţine pulsaţia proprie fundamentală (în rad/s)

$$\omega_1=\frac{3{,}6638}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\,.$$

Soluţia adevărată (5.16) este $\omega_1=\dfrac{3{,}515}{\ell^2}\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A}}$, deci valoarea obţinută cu formula lui Rayleigh este cu 4 % mai mare.

Dacă funcţia admisibilă se alege deformata statică a barei în consolă acţionată de o forţă aplicată la capăt, la care se neglijează greutatea proprie

$$v=v_0\,\frac{1}{2}\left[3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2-\left(\frac{x}{\ell}\right)^3\right],$$

energia potenţială maximă este $U_{max}=\dfrac{3}{2}\dfrac{EI}{\ell^3}v_0^2=\dfrac{1}{2}k\,v_0^2$ şi energia cinetică maximă este $T_{max}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{33\rho A\ell}{140}\right)\omega_1^2 v_0^2=\dfrac{1}{2}m_{red}\left(\omega_1 v_0\right)^2$.

Egalând cele două energii, pulsaţia proprie fundamentală dată de formula lui Rayleigh este

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3EI/\ell^3}{(33/140)\rho A\ell}} = \sqrt{\frac{k}{m_{red}}} = \frac{3{,}5675}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}},$$

care este numai cu 1,47 % mai mare decât valoarea adevărată (5.16).

Relația de mai sus arată că, pentru deformata aproximativă considerată, bara cu masă uniform distribuită are aceeaşi pulsație proprie ca o bară fără masă distribuită dar cu o masă concentrată $(33/140)\rho A\ell$ în capătul liber. Aceasta se numeşte *masa redusă* a barei.

Exemplul 2.3

Să se determine pulsația proprie fundamentală a barei libere la capete din fig. 2.7.

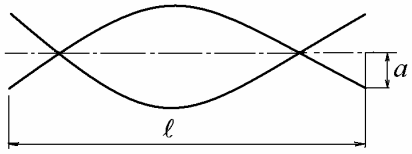


Fig. 2.7

Rezolvare. Se alege deformata aproximativă de forma

$$v = v_0 \sin\frac{\pi x}{\ell} - a\,.$$

Constanta a trebuie determinată din condiția de conservare a cantității de mişcare pentru bara liberă la capete

$$\int_0^\ell (viteza)\cdot \mathrm{d}(masa) = \int_0^\ell (\omega v)(\rho A\,dx) = \omega\rho A\int_0^\ell v\,dx = 0\,,$$

de unde rezultă $a = 2v_0/\pi$.

Utilizând forma deformată

$$v = v_0\left(\sin\frac{\pi x}{\ell} - \frac{2}{\pi}\right),$$

din ecuația (2.19) se obține pulsația proprie fundamentală a barei

$$\omega_1 = \frac{22{,}6}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\,.$$

Valoarea adevărată (5.21, *a*) este $\omega_1 = \dfrac{22{,}4}{\ell^2}\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A}}$ deci discrepanța este doar 0,9 %.

2.2 Vibrații forțate neamortizate

Vibrațiile forțate sunt produse de forțe exterioare variabile în timp sau deplasări impuse. Dacă asupra masei acționează o forță armonică de amplitudine constantă şi frecvență variabilă, atunci când frecvența excitatoare se apropie de frecvența proprie a sistemului, deplasarea masei creşte nelimitat. Această condiție se numeşte *rezonanță* şi este caracterizată de vibrații puternice. La sisteme neamortizate, frecvențele de rezonanță sunt egale cu frecvențele proprii ale sistemului şi, în majoritatea cazurilor, funcționarea la rezonanță trebuie evitată. La sisteme amortizate, răspunsul la rezonanță are amplitudine finită.

Un leagăn împins la anumite intervale efectuează oscilații la rezonanță. Funcționarea utilajelor de compactare a terenului şi a betonului, a transportoarelor oscilante, a uneltelor şi a ciururilor vibratoare este adesea bazată pe rezonanță. Totuşi principala problemă cu rezonanța este legată de efectele dăunătoare ale acesteia. Funcționarea la rezonanță implică deplasări şi tensiuni mari, care produc oboseală şi ruperi, efecte nocive sau disconfort utilizatorilor, şi o descreştere a preciziei produselor. Zgomotul produs de o maşină casnică sau de un subansamblu al unui automobil poate fi o piedică în vânzarea acestora.

Dacă forța armonică este aplicată arcului, deplasarea punctului de excitație descreşte la zero la frecvența proprie a sistemului. Această condiție se numeşte *antirezonanță*. În general, aceasta este o proprietate locală, dependentă de punctul de aplicație a excitației.

2.2.1 Excitarea masei cu o forță arbitrară

Fie forța $F(t)$ cu o variație arbitrară în timp (fig. 2.8).

În intervalul de timp infinitezimal $\mathrm{d}\tau$, forța $F(\tau)$ poate fi considerată constantă. Suprafața haşurată reprezintă un impuls infinitezimal $F(\tau)\mathrm{d}\tau$ care produce o variație de viteză

$$\mathrm{d}\dot{x} = \frac{F(\tau)\mathrm{d}\tau}{m}.$$

Răspunsul masei m produs de impulsul diferențial, de-a lungul întregii istorii de solicitare pentru $t > \tau$, este

$$\mathrm{d}x = \frac{F(\tau)\mathrm{d}\tau}{m}\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau), \qquad (2.20)$$

şi poate fi dedus din (2.6) considerând că la $t=\tau$, deplasarea $x_0 = 0$ şi viteza $v_0 = \mathrm{d}\dot{x}$.

Se poate considera că întreaga istorie de solicitare constă dintr-o succesiune de astfel de impulsuri infinitezimale, fiecare producând un răspuns diferențial de forma (2.20).

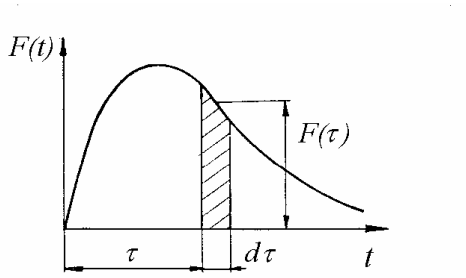


Fig. 2.8

Pentru un sistem liniar, răspunsul total se poate obține însumând toate răspunsurile diferențiale produse în timpul istoriei de solicitare, deci integrând expresia (2.20) după cum urmează

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau. \qquad (2.21)$$

Relația (2.21) este cunoscută sub numele de *integrala lui Duhamel* pentru un sistem neamortizat.

2.2.2 Excitarea masei cu o forță armonică

Sistemul masă-arc din fig. 2.9, *a* este excitat de o forță armonică $f(t) = F_0\cos\omega t$ de amplitudine constantă F_0 şi pulsație perturbatoare ω, aplicată masei.

Pe baza diagramei forțelor din fig. 2.9, *b*, se scrie legea a doua a lui Newton

$$m\ddot{x} = -kx + F_0\cos\omega t,$$

care devine ecuația diferențială a mişcării

$$m\ddot{x} + k\,x = F_0 \cos\omega t\,. \tag{2.22}$$

Soluția generală a ecuației liniare neomogene (2.22) este suma soluției (2.3) a ecuației cu membrul drept zero şi a soluției particulare. În regim staționar, soluția particulară se alege de aceeaşi formă ca excitația

$$x_P(t) = X\cos\omega t\,, \tag{2.23}$$

unde X este amplitudinea răspunsului forțat.

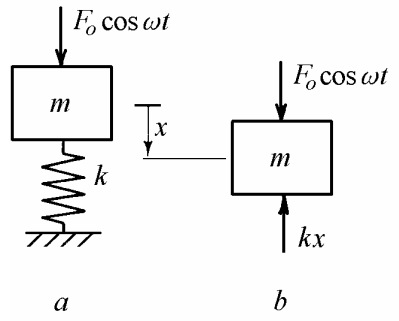


Fig. 2.9

Înlocuind soluția particulară (2.23), ecuația (2.22) devine

$$-m\omega^2 X\cos\omega t + k\,X\cos\omega t = F_0\cos\omega t\,,$$

în care se poate simplifica $\cos\omega t$, rezultând

$$\left(k - m\omega^2\right)X = F_0\ ,$$

sau
$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0/k}{1 - m\omega^2/k} = \frac{X_{st}}{1-\left(\omega/\omega_n\right)^2}\,. \tag{2.24}$$

În expresia (2.24)

$$X_{st} = \frac{F_0}{k} \tag{2.25}$$

este săgeata statică a arcului produsă de forța (constantă) F_0 iar $\omega_n = \sqrt{k/m}$ este pulsația proprie neamortizată (2.4).

La pulsații $\omega \neq \omega_n$, soluția generală a ecuației (2.22) este

$$x(t) = C_1 \sin \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t + \frac{X_{st}}{1-(\omega/\omega_n)^2} \cos \omega t \,. \qquad (2.26)$$

Fiind suma a două componente armonice de pulsații diferite, soluția (2.26) nu reprezintă o mişcare armonică.

Dacă deplasarea inițială este x_0 şi viteza inițială este v_0, atunci din ecuația (2.26) se obține

$$x(0) = C_2 + \frac{X_{st}}{1-(\omega/\omega_n)^2} = x_0 \,, \qquad \dot{x}(0) = C_1 \omega_n = v_0 \,,$$

deci răspunsul total este

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \left[x_0 - \frac{X_{st}}{1-(\omega/\omega_n)^2} \right] \cos \omega_n t + \frac{X_{st}}{1-(\omega/\omega_n)^2} \cos \omega t \,. \qquad (2.27)$$

Pentru condiții inițiale nule, $x_0 = v_0 = 0$, răspunsul (2.27) devine

$$x(t) = \frac{X_{st}}{1-(\omega/\omega_n)^2} \left(\cos \omega t - \cos \omega_n t \right). \qquad (2.28)$$

2.2.3 Bătăi

Diferența cosinusurilor din relația (2.28) se poate exprima sub formă de produs

$$x(t) = \frac{2X_{st}}{1-(\omega/\omega_n)^2} \sin \omega_m t \, \sin \Delta\omega \, t \,, \qquad (2.29)$$

unde

$$\omega_m = \frac{\omega_n + \omega}{2} \qquad \text{şi} \qquad \Delta\omega = \frac{\omega_n - \omega}{2} \,.$$

Atunci când $\Delta\omega$ devine foarte mic, deoarece ω_m este relativ mare, produsul din expresia (2.29) reprezintă o oscilație modulată în amplitudine. Mişcarea armonică cu pulsația mai mare ω_m este modulată în amplitudine de mişcarea armonică cu pulsație mai joasă $\Delta\omega$ (fig. 2.10). Mişcarea rezultantă, care este o oscilație rapidă cu amplitudinea variabilă lent, este cunoscută sub numele de *bătăi*.

Terminologia derivă din acustică. Când două coarde de pian pentru aceeaşi notă sunt puțin dezacordate, se aude un sunet a cărui intensitate creşte şi scade periodic (bătăi). Bătăile dispar când corzile sunt acordate la unison, şi se aude o singură frecvență.

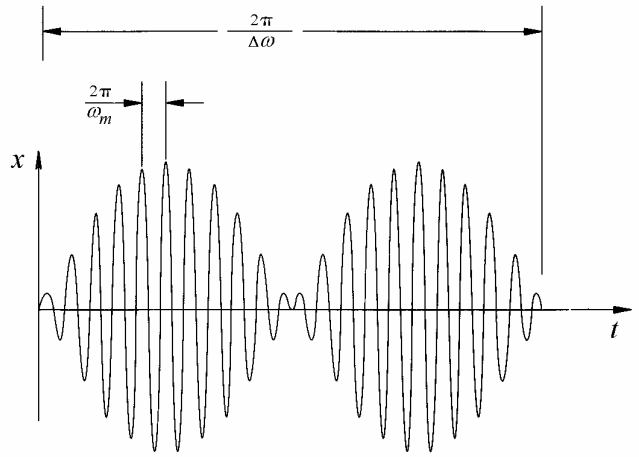


Fig. 2.10

Bătăile se pot auzi într-un avion bimotor, când cele două motoare au turaţii puţin diferite. Ele apar în centrale electrice la pornirea unui generator. Puţin înainte de conectarea generatorului la reţea, frecvenţa curentului produs de generator este puţin diferită de frecvenţa reţelei. Zgomotul produs de generator şi zgomotele produse de celelalte generatoare şi transformatoare au înălţimi diferite şi se pot auzi bătăile.

2.2.4 Curbe de răspuns în frecvenţă

Este interesant de examinat în detaliu dependenţa de frecvenţă a amplitudinii răspunsului staţionar

$$X = \frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2} X_{st} \quad . \tag{2.30}$$

Valoarea absolută a coeficientului lui X_{st} în membrul drept al relaţiei (2.30) se numeşte *factor de amplificare dinamic.*

În fig. 2.11, *a* s-a reprezentat variaţia amplitudinii X în funcţie de pulsaţia excitatoare ω. La pulsaţii $\omega < \omega_n$ ordonatele sunt pozitive, forţa şi deplasarea masei sunt în fază, în timp ce la pulsaţii $\omega > \omega_n$ ordonatele sunt negative, forţa şi deplasarea masei sunt defazate 180^0 (fig. 2.11, *b*). În timp ce pentru $\omega < \omega_n$ masa este sub poziţia de echilibru static când forţa acţionează în jos, pentru $\omega > \omega_n$ masa este deasupra poziţiei de echilibru când forţa acţionează în jos.

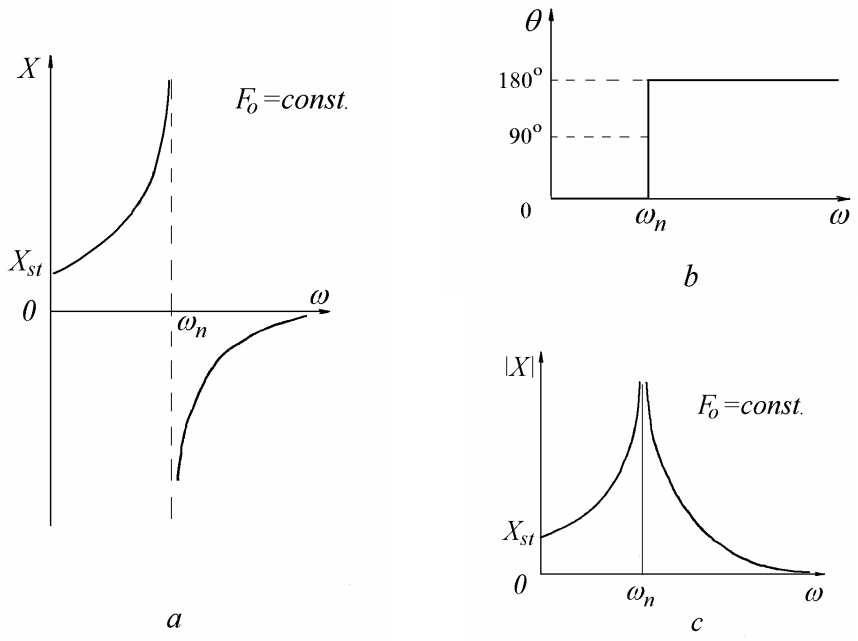


Fig. 2.11

Deobicei relaţia de fază interesează mai puţin, iar curba de rezonanţă este prezentată ca în fig. 2.11, *c* cu modulul amplitudinii pe axa ordonatelor. Această diagramă este denumită *curba de răspuns în frecvenţă*.

2.2.5 Rezonanţa

La $\omega/\omega_n = 1$, când pulsaţia perturbatoare coincide cu pulsaţia proprie a sistemului, amplitudinea devine infinită (deoarece sistemul este neamortizat). Acest fenomen este numit "rezonanţă", iar pulsaţia proprie este uneori numită "pulsaţia de rezonanţă".

Atunci când $\omega = \omega_n$ forţa elastică şi forţa de inerţie se echilibrează reciproc iar forţa excitatoare produce creşterea nelimitată a amplitudinii mişcării sistemului neamortizat. Sistemele amortizate au amplitudini finite la rezonanţă iar defazajul între forţă şi deplasare este 90^0 (fig. 2.28).

Se consideră cazul în care, pornind din repaus, sistemul masă-arc este solicitat de o forţă $F_0 \cos \omega_n t$, unde ω_n este pulsaţia proprie. Atunci când ω

devine exact egal cu ω_n, soluția (2.27) nu mai este valabilă. Înlocuind $F(\tau)=F_0\cos\omega_n\tau$ în ecuația (2.21) se obține

$$x(t)=\frac{F_0}{m\omega_n}\int_0^t \cos\omega_n\tau\ \sin\omega_n(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

$$x(t)=\frac{F_0}{m\omega_{\mathrm{n}}}\left[\ \sin\omega_n t\ \int_0^t \cos^2\omega_n\tau\ \,\mathrm{d}\tau-\cos\omega_n t\ \int_0^t \cos\omega_n\tau\ \sin\omega_n\tau\,\mathrm{d}\tau\ \right],$$

$$x_P(t)=\frac{F_0}{m\omega_n}\ \frac{t}{2}\sin\omega_n t\,. \tag{2.31}$$

Astfel, atunci când este excitat la rezonanță, amplitudinea sistemului neamortizat creşte liniar în timp. Deoarece excitația este o funcție *cosinus* iar răspunsul este o funcție *sinus*, între ele există un defazaj de 90^0.

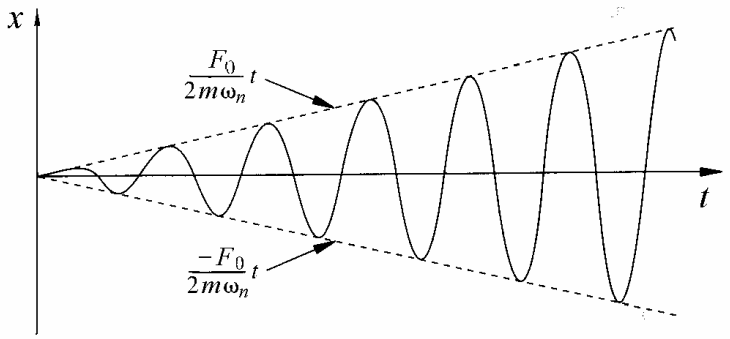


Fig. 2.12

Soluția totală pentru condiții inițiale nenule este în acest caz

$$x(t)=\frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t+x_0\cos\omega_n t+\frac{F_0}{2\,m\,\omega_n}\ t\ \sin\omega_n t\,. \tag{2.32}$$

Variația în timp a deplasării la rezonanță $x(t)$ este prezentată în fig. 2.12 pentru condiții inițiale nule. Se observă că $x(t)$ creşte nelimitat, dar această creştere nu este instantanee ci necesită un anumit timp, funcție de masa şi rigiditatea sistemului.

2.2.6 Trecerea prin rezonanță

Pentru majoritatea sistemelor vibratoare, valoarea staționară a amplitudinii deplasării se atinge relativ repede, viteza cu care se realizează contând mai puțin.

Totuşi, atunci când un sistem vibrator este accelerat prin rezonanță, deci când frecvența excitatoare este baleiată cu o anumită viteză $\varepsilon = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$, nu mai este timp suficient pentru atingerea valorii staționare a deplasării şi amplitudinea la rezonanță este finită chiar în cazul sistemelor neamortizate. Astfel, la trecerea prin rezonanță, interesează răspunsul la o forță cu frecvență variabilă.

În acest caz, înfăşurătoarea răspunsului are un maxim ca un vârf de rezonanță, uneori urmat de bătăi. Dacă frecvența excitatoare creşte (fig. 2.13), atunci frecvența la care apare răspunsul maxim este mai mare decât cea obținută în condiții staționare, amplitudinea maximă este mai mică şi lățimea curbei de rezonanță este mai mare. Dacă frecvența excitatoare scade, frecvența la care apare răspunsul maxim este mai mică decât cea obținută în condiții staționare. În fig. 2.13, forța are o variație $f(t) = F_0 \sin\left(\frac{1}{2}\varepsilon\, t^2 + \frac{\pi}{2}\right)$ cu $\varepsilon = const.$

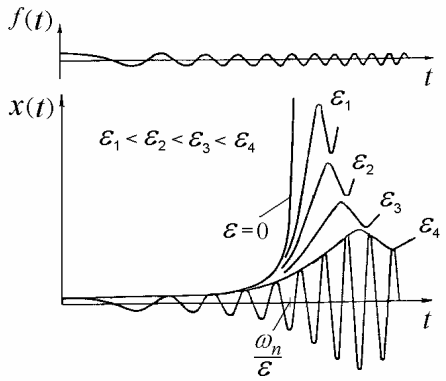


Fig. 2.13

Efectul vitezei de baleiaj depinde de amortizarea din sistem. Cu cât amortizarea este mai mică, cu atât este necesar mai mult timp pentru atingerea nivelului staționar al răspunsului. Figura 2.13 este trasată pentru amortizare nulă.

2.2.7 Rezonanța cu amplitudine constantă a deplasării

Rezonanța este o stare în care fie o deplasare maximă este produsă de o forță cu amplitudine constantă, fie o forță minimă este necesară pentru a menține o anumită deplasare constantă.

Când amplitudinea forţei F este variabilă şi amplitudinea deplasării X_0 este menţinută constantă, relaţia (2.24) se poate scrie

$$F = k\,X_0\left[\,1-\left(\omega/\omega_n\right)^2\right]. \qquad (2.33)$$

În fig. 2.14 se prezintă variaţia valorii absolute a forţei în funcţie de pulsaţia excitatoare, pentru $X_0 = const.$ Pentru un sistem neamortizat, forţa aplicată la rezonanţă este zero, deoarece forţa elastică este echilibrată de forţa de inerţie.

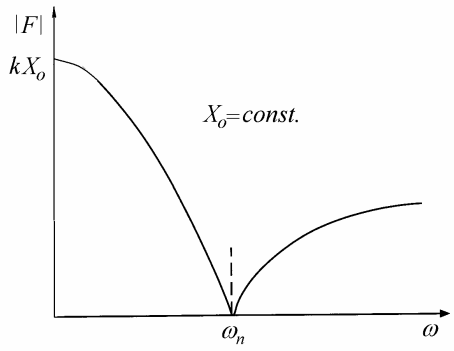


Fig. 2.14

Rezonanţa este o stare în care o excitaţie minimă este necesară pentru a produce un răspuns dinamic maxim.

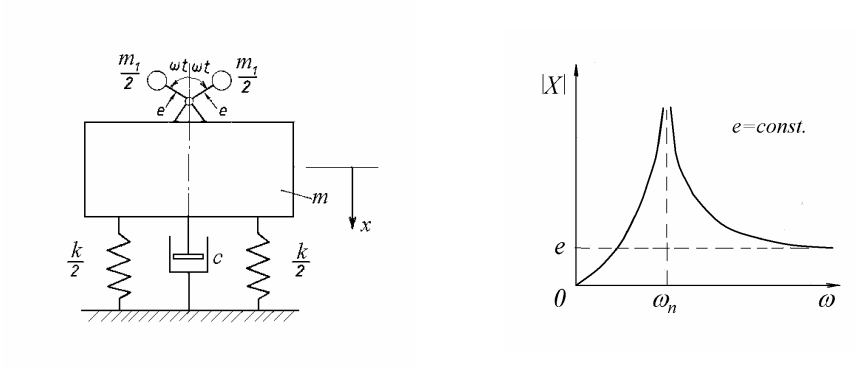
2.2.8 Excitaţia cu mase excentrice în rotaţie

În multe cazuri practice, vibraţiile apar sub acţiunea forţelor centrifuge produse de mase excentrice în rotaţie. Spre deosebire de forţele cu amplitudine constantă, considerate anterior, forţele produse de mase excentrice în rotaţie au amplitudini proporţionale cu pătratul pulsaţiei. Aceste forţe au forma $m_1 e\omega^2 \cos\omega t$, fiind proiecţia verticală a forţelor centrifuge ce acţionează asupra maselor $m_1/2$ în rotaţie cu viteza unghiulară ω şi excentricitatea e (fig. 2.15, *a*).

Amplitudinea vibraţiilor forţate produse de această forţă se poate obţine înlocuind F_0 cu $m_1 e\omega^2$ în relaţia (2.24). Rezultă

$$X = \frac{m_1 e\omega^2}{k - m\,\omega^2} = \frac{m_1 e\,\omega^2/k}{1-\left(\omega/\omega_n\right)^2} = e\,\frac{\left(\omega/\omega_n\right)^2}{1-\left(\omega/\omega_n\right)^2}. \qquad (2.34)$$

În expresia (2.34) m este masa totală în vibrație care include şi masa m_1.



a *b*

Fig. 2.15

În fig. 2.15, *b* se prezintă variația valorii absolute a amplitudinii X din relația (2.34) în funcție de pulsația ω, pentru $e = const.$ Diagrama porneşte de la zero, tinde la infinit la rezonanță şi descreşte la valoarea e la pulsații înalte.

2.2.9 Antirezonanța

Fie sistemul masă-arc nerezemat din fig. 2.16, acționat de o forță armonică aplicată la bază. Ecuațiile de mişcare au forma

$$-m\ddot{x}_2 = k\left(x_2 - x_1\right) = F_0 \cos\omega t \,.$$

Amplitudinea deplasării punctului de aplicație al forței este

$$X_1 = \frac{F_0}{k}\,\frac{k - m\omega^2}{m\omega^2} = \frac{F_0}{k}\,\frac{1-\left(\omega/\omega_n\right)^2}{\left(\omega/\omega_n\right)^2}\,.$$

În cazul unei forțe de amplitudine constantă $F_0 = const.$, valoarea absolută a amplitudii deplasării are o valoare minimă egală cu zero la pulsația proprie.

Această condiție este definită ca o *antirezonanță*, deoarece sistemul se comportă total diferit de rezonanță, unde amplitudinea este infinită. În general, antirezonanța are loc la o pulsație la care o forță de amplitudine maximă produce un răspuns de amplitudine minimă.

Spre deosebire de *rezonanță,* care este o proprietate *globală* a unui sistem în vibrație, independentă de poziția punctului de aplicație a excitației, *antirezonanța* este o proprietate *locală*, care depinde de poziția punctului de aplicație a excitației.

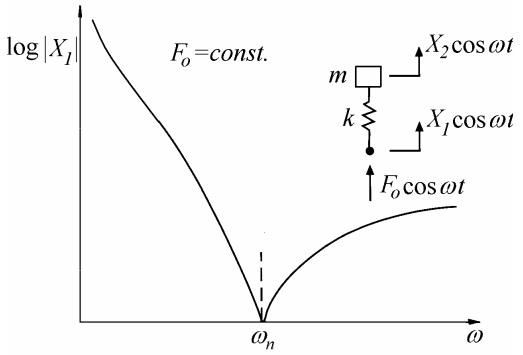


Fig. 2.16

În absența amortizării, pulsația de antirezonanță a sistemului masă-arc excitat la bază este aceeaşi ca pulsația de rezonanță a sistemului rezemat la bază şi excitat prin masă. Dacă se ataşează o a doua masă la bază, în punctul de aplicație al excitației, se obține un sistem masă-arc-masă al cărui răspuns în punctul de aplicare a excitației are pe lângă antirezonanță şi o rezonanță.

2.2.10 Transmisibilitatea

Dacă la baza sistemului masă-arc se aplică o deplasare impusă (excitație cinematică) $x_1 = X_1 \cos\omega t$, atunci mişcarea transmisă masei $x_2 = X_2 \cos\omega t$ este definită de raportul amplitudinilor

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2}. \qquad (2.35)$$

Raportul $TR = |X_2|/X_1$ se numeşte *transmisibilitate* şi este reprezentat grafic în fig. 2.17 în funcție de pulsația adimensională ω/ω_n.

Pentru valori $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$, transmisibilitatea este subunitară $(TR < 1)$ iar masa sistemului se spune că este izolată față de mişcarea bazei. Izolarea vibrațiilor este posibilă doar deasupra rezonanței, la pulsații $\omega > \sqrt{2}\omega_n$. Elementul elastic dintre masă şi baza în vibrație poate fi proiectat astfel încât să asigure un anumit grad de izolare, impunând o anumită valoare TR. Aceasta arată în ce măsură mişcarea masei izolate este redusă față de cazul în care masa ar fi montată direct pe baza vibrantă.

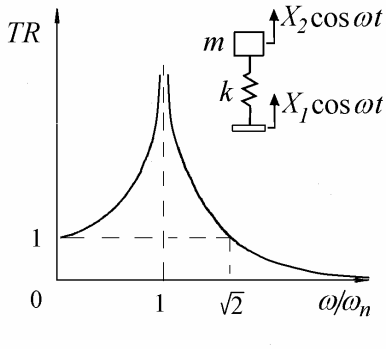


Fig. 2.17

2.2.11 Turația critică a rotorului Laval

Fie rotorul din fig. 2.18, compus dintr-un disc rigid, dispus la mijlocul unui arbore de masă neglijabilă, rezemat la capete în lagăre rigide, denumit *rotorul Laval*. Centrul de greutate *G* al discului se află la o distanță radială *e* de centrul său geometric *C*. Linia centrelor lagărelor intersectează planul discului în punctul *O*.

Când arborele este rotit în jurul axei lagărelor, discul se rotește în planul său în jurul centrului geometric *C*. Asupra discului acționează o forță centrifugă $m\, r_G\, \omega^2$, unde ω este viteza unghiulară de rotație, m este masa discului concentrată în G şi $r_G = OG$. Această forță produce îndoirea arborelui, despre care se spune că este într-o stare de dezechilibru. Arborele reacționează cu o forță de readucere elastică $k\, r_C$ aplicată în *C*, unde k este rigiditatea arborelui măsurată în dreptul discului şi $r_C = OC$.

Neglijând efectul greutății proprii şi al amortizării, discul este solicitat numai de aceste două forțe. Pentru a fi în echilibru, cele două forțe trebuie să fie coliniare, egale şi de sens contrar

$$k r_C = m\omega^2 \left(r_C + e\right).$$

Rezolvând în funcție de r_C, se obține

$$r_C = \frac{m\,\omega^2 e}{k - m\,\omega^2} = \frac{e\left(\omega/\omega_n\right)^2}{1-\left(\omega/\omega_n\right)^2}, \qquad (2.36)$$

unde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ este pulsația proprie a vibrațiilor transversale ale rotorului la viteză unghiulară nulă.

Această expresie reprezintă raza orbitei punctului *C* în precesie în jurul axei lagărelor cu viteza unghiulară ω. Deoarece simultan discul se roteşte în jurul punctului *C* cu aceeaşi viteză unghiulară, mişcarea arborelui se numeşte *precesie sincronă*.

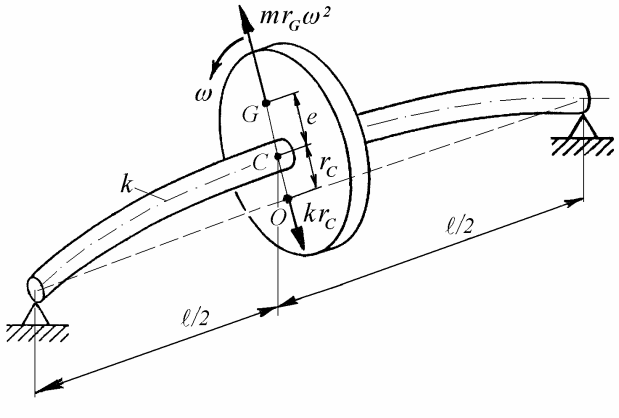


Fig. 2.18

Raza orbitei circulare a punctului *G* este

$$r_G = r_C + e = \frac{e}{1-(\omega/\omega_n)^2}. \qquad (2.37)$$

În fig. 2.19 se prezintă grafic variaţia razelor r_C (linie continuă) şi r_G (linie întreruptă) în funcţie de viteza unghiulară ω.

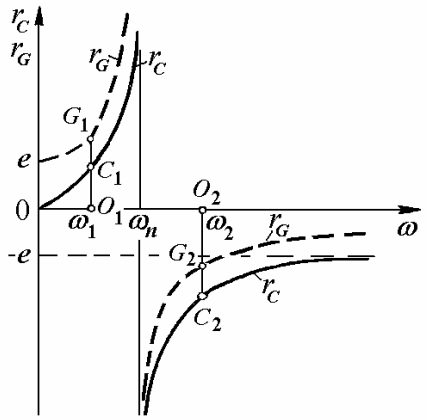


Fig. 2.19

La o viteză unghiulară $\omega_1 < \omega_n$ sistemul se roteşte cu punctul G_1 în exteriorul punctului C_1, în timp ce la viteze unghiulare $\omega_2 > \omega_n$ punctul G_2 se roteşte în interiorul punctului C_2. La viteze unghiulare foarte mari, $\omega >> \omega_n$, raza r_C devine egală cu excentricitatea *e,* iar punctele *O* şi *G* coincid, discul având o precesie în jurul centrului său de greutate.

La $\omega = \omega_n$, razele r_C şi r_G cresc nelimitat. Turația $n_{cr} = 30\,\omega_n / \pi$ se numeşte *turația critică* a arborelui. Relațiile (2.36) şi (2.37) arată că viteza unghiulară critică a arborelui este egală cu pulsația proprie a vibrațiilor de încovoiere ale rotorului.

Variația bruscă a poziției relative a punctelor *O*, *C* şi *G* la turația critică se datoreşte neglijării amortizării. La sistemele amortizate, când turația arborelui variază, segmentul *CG* se roteşte continuu față de *OC,* astfel încât "punctul cel mai îndepărtat" ("high spot") nu mai coincide cu "punctul greu" ("heavy spot"). La turația critică, unghiul între cele două segmente este 90^0 (v. § 2.4.11) .

Deşi există o analogie evidentă între expresiile (2.36) şi (2.37) pe de o parte, şi răspunsul staționar al unui sistem liniar masă-arc (2.30) şi (2.34) pe de altă parte, mişcarea forțată a arborelui în rotație nu este o vibrație propriu-zisă. În arbore nu apar tensiuni ciclice, acesta se încovoaie şi 'îndoitura' este constantă la turație constantă. Deformația de încovoiere este maximă atunci când viteza unghiulară este egală cu pulsația vibrațiilor de încovoiere ale arborelui pe care acesta le-ar efectua dacă nu s-ar roti şi ar executa doar vibrații laterale libere neamortizate.

2.3 Vibrații libere amortizate

În timpul vibrațiilor, energia mecanică se disipează prin frecări sau alte rezistențe. În prezența amortizării, amplitudinea vibrațiilor libere scade în timp iar pentru a menține constantă amplitudinea vibrațiilor trebuie aplicate forțe exterioare. În general, disiparea de energie este denumită *amortizare*. Ea este produsă de frecarea internă în materiale, de frecarea între componentele unei structuri, de interacțiunile fluid-structură, de radiație şi de mişcarea în câmpuri electrice sau magnetice.

Cel mai simplu mecanism de amortizare se datoreşte mişcării într-un mediu vâscos. Forța de amortizare vâscoasă este proporțională cu viteza. Experiența a arătat că în structuri aeronautice disiparea de energie este mai bine reprezentată de amortizarea structurală. *Amortizarea structurală* sau *histeretică* este descrisă de o forță de amortizare în fază cu viteza dar proporțională cu deplasarea. Pentru a descrie mai bine comportarea unor sisteme vibratoare reale, s-

au imaginat mecanisme mai complicate de amortizare, cum ar fi *amortizarea ereditară*.

2.3.1 Amortizarea vâscoasă

Sistemul din fig. 2.20, *a* constă dintr-un arc liniar de rigiditate *k*, o masă *m* şi un amortizor vâscos. Forţa din amortizor este proporţională cu viteza şi de semn opus. Factorul de proporţionalitate se numeşte *coeficient de amortizare vâscoasă, c*, având unităţi $\mathrm{N}/(\mathrm{m}/\mathrm{s})$.

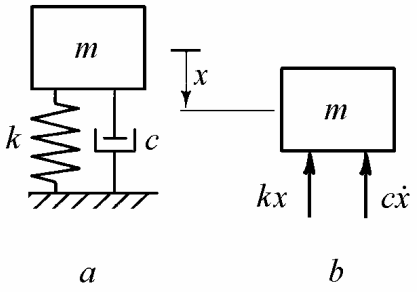


Fig. 2.20

În cazul vibraţiilor libere, ecuaţia diferenţială a mişcării se obţine utilizând diagrama forţelor din fig. 2.20, *b* şi legea a doua a lui Newton

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx,$$

care mai poate fi scrisă

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \tag{2.38}$$

Presupunând soluţii de forma $x = \mathrm{e}^{st}$, se obţine *ecuaţia caracteristică*

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0, \tag{2.39}$$

care are două rădăcini

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}. \tag{2.40}$$

Soluţia generală pentru vibraţiile libere amortizate este

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}, \tag{2.41}$$

în care constantele de integrare se determină din condiţiile iniţiale ale mişcării.

Ca o mărime de referinţă, se alege *amortizarea critică* definită de valoarea coeficientului *c* pentru care radicalul din expresia (2.40) este zero

$$\frac{c_c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_n ,$$

sau
$$c_c = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n . \tag{2.42}$$

Amortizarea din sistem poate fi definită printr-o mărime adimensională, egală cu raportul între coeficientul de amortizare real şi cel critic

$$\zeta = \frac{c}{c_c}, \tag{2.43}$$

denumit *raport de amortizare* (sau *fracțiune din amortizarea critică*)

Cu această notație, relația (2.40) devine

$$s_{1,\,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \omega_n . \tag{2.44}$$

În continuare se consideră cele trei cazuri distincte pentru natura rădăcinilor (2.44), care pot fi reale diferite, complexe sau reale egale.

Cazul I: *Sistem amortizat subcritic*, $\zeta < 1$

Pentru $\zeta < 1$, expresia (2.44) se poate scrie

$$s_{1,\,2} = \left(-\zeta \pm \mathrm{i}\sqrt{1-\zeta^2} \right) \omega_n . \tag{2.45}$$

Înlocuind rădăcinile (2.45) în soluția (2.41) rezultă

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(C_1 e^{\,\mathrm{i}\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t} + C_2 e^{\,-\mathrm{i}\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t} \right),$$

sau, utilizând formula lui Euler $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = \cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta$, după transformări se obține

$$x(t) = A\, e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \phi \right). \tag{2.46}$$

Expresia (2.46) arată că mişcarea este oscilatorie cu amplitudine descrescătoare. Descreşterea amplitudinii în timp este proporțională cu $\mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t}$, după cum se arată cu linii întrerupte în fig. 2.21.

Pulsația oscilației amortizate

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n \tag{2.47}$$

este mai mică decât *pulsația proprie neamortizată* ω_n şi se numeşte *pulsație proprie amortizată* sau *pseudopulsație*. Dacă $\zeta \to 1$, ω_d tinde la zero şi mişcarea nu mai este oscilatorie.

Relația (2.44) se poate scrie

$$s_{1,2} = -\sigma \pm \mathrm{i}\omega_d \tag{2.48}$$

unde

$$\sigma = \zeta \omega_n \tag{2.49}$$

este un factor de amortizare egal cu viteza de descreştere a amplitudinii (panta tangentei la înfăşurătoarea exponențială la $t = 0$), deci o *constantă de atenuare*.

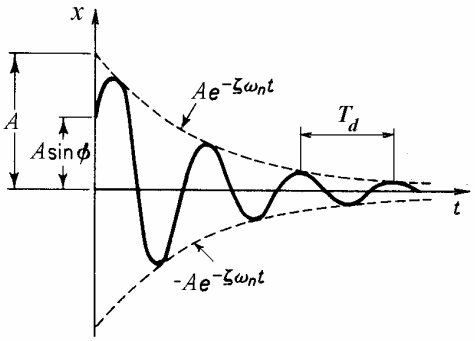


Fig. 2.21

Se pot stabili următoarele relații

$$\zeta = \frac{\sigma}{\sqrt{\omega_d^2 + \sigma^2}}, \qquad \omega_n = \frac{\sigma}{\zeta} = \sqrt{\omega_d^2 + \sigma^2}\ . \tag{2.50}$$

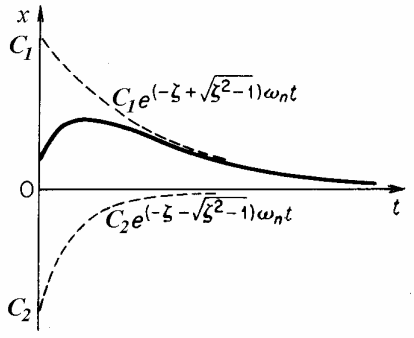


Fig. 2.22

Cazul II: *Sistem amortizat supracritic*, $\zeta > 1$

Pentru $\zeta > 1$, înlocuind rădăcinile (2.44) în (2.41) rezultă

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t} + C_2 e^{\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}.$$

Mişcarea nu mai este oscilatorie (Fig. 2.22) fiind denumită *aperiodică*.

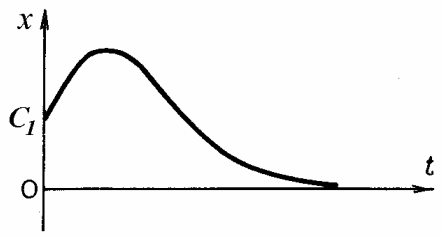


Fig. 2.23

Cazul III: *Sistem amortizat critic*, $\zeta = 1$

Amortizarea critică marchează tranziția de la mişcări oscilatorii la mişcări aperiodice. În acest caz limită, soluția generală este

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)\, \mathrm{e}^{-\omega_n t}.$$

Mişcarea este similară celei cu amortizare supracritică (fig. 2.23) dar revine la repaus în timpul cel mai scurt fără oscilații. Această proprietate este utilizată la aparatele electrice cu ac indicator, a căror parte mobilă este amortizată critic pentru a reveni cât mai repede pe valoarea măsurată.

2.3.2 Decrementul logaritmic

O modalitate de determinare a amortizării într-un sistem în vibrație este măsurarea vitezei de descreştere a amplitudinii oscilațiilor. Aceasta se exprimă convenabil prin *decrementul logaritmic*, definit ca logaritmul natural al raportului a două amplitudini succesive. În cazul amortizării vâscoase, acest raport este constant, indiferent de amplitudinile utilizate în calcul.

Se consideră vibrograma unei vibrații amortizate (fig. 2.24), descrisă de expresia (2.46).

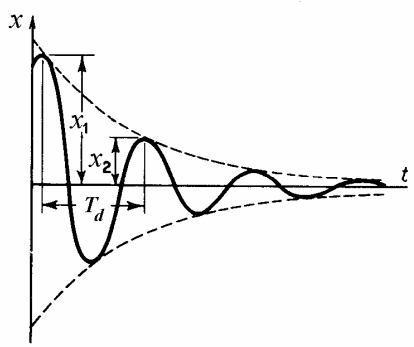


Fig. 2.24

Sinusoida cu amplitudini descrescătoare este tangentă la înfăşurătoarea exponențială în puncte situate puțin la dreapta punctelor cu valori extreme ale amplitudinii, unde funcția sinus este egală cu 1. Întrucât această diferență este practic neglijabilă, raportul a două amplitudini succesive poate fi înlocuit cu raportul ordonatelor exponențialei calculate la distanță de o perioadă de oscilație

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{A\, e^{-\zeta \omega_n t}}{A\, e^{-\zeta \omega_n (t+T_d)}} = e^{\zeta \omega_n T_d},$$

unde perioada vibrației amortizate este

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_d}.$$

Decrementul logaritmic este

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \zeta \omega_n T_d = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}. \qquad (2.51)$$

Pentru $\zeta << 1$, decrementul logaritmic este aproximativ $\delta \cong 2\pi\zeta$.

Uneori descreşterea amplitudinii după un singur ciclu de oscilație este prea mică pentru a fi măsurată corect şi poate fi observată numai după *n* cicluri. Raportul amplitudinilor măsurat după *n* cicluri de oscilație este

$$\frac{x_0}{x_n} = \frac{x_0}{x_1}\frac{x_1}{x_2}\frac{x_2}{x_3} \cdots \frac{x_{n-1}}{x_n} = \left(e^{\delta}\right)^n = e^{n\delta},$$

astfel încât decrementul logaritmic se poate calcula cu relația

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_0}{x_n}. \qquad (2.51, a)$$

Dacă amplitudinile succesive sunt reprezentate grafic în funcție de indicele ciclului pe o scară logaritmică, punctele se vor înscrie în lungul unei linii dreapte dacă amortizarea este vâscoasă, aşa cum s-a presupus în ecuația (2.38).

În practică, se trasează întâi înfăşurătoarele care trec prin punctele de amplitudine maximă, respectiv minimă (fig. 2.25, *a*). Se măsoară apoi distanța verticală între cele două înfăşurătoare, în dreptul punctelor de maxim şi minim ale vibrogramei. Aceste distanțe se reprezintă grafic pe o scară logaritmică în funcție de numărul de semicicluri de vibrație, apoi prin punctele obținute se trasează o linie dreaptă (fig. 2.25, *b*). Panta acestei drepte este utilizată apoi pentru calculul raportului de amortizare.

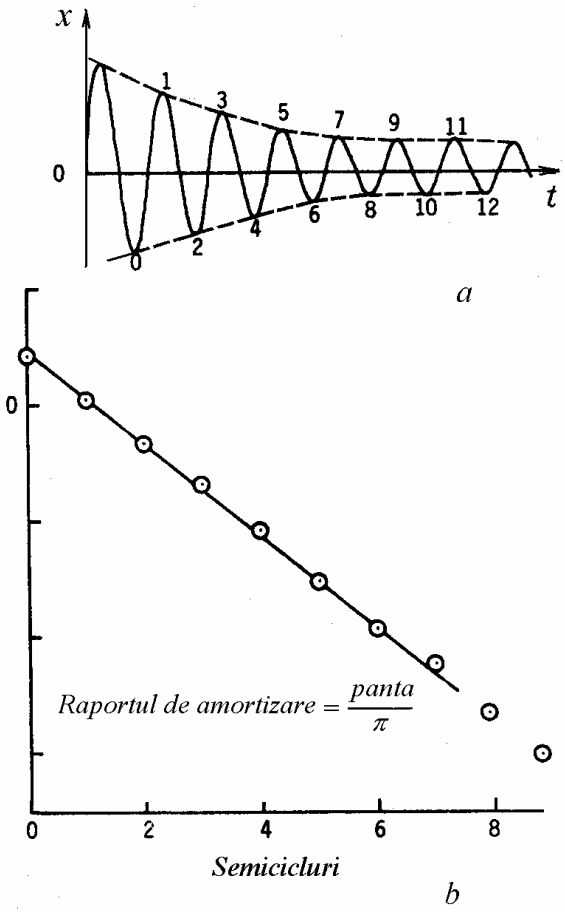


Fig. 2.25

Pentru $\zeta << 1$, logaritmând relația (2.51, *a*) se obține

$$\ln x_n = \ln x_0 - 2\zeta\pi \cdot n ,$$

deci raportul de amortizare ζ este egal cu panta dreptei împărţită la 2π (sau la π, dacă se măsoară ordonatele maximelor şi minimelor ca în fig. 2.25).

2.3.3 Factorul de pierderi

O măsură convenabilă a amortizării este *factorul de pierderi* definit ca raportul între energia disipată într-un ciclu de vibraţie (sau energia ce trebuie suplinită sistemului pentru a menţine vibraţii de amplitudine constantă) ΔU şi energia potenţială maximă *U,* acumulată de sistem în ciclul respectiv

$$\eta = \frac{\Delta U}{U} . \qquad (2.52)$$

În general, factorul de pierderi depinde de frecvenţa şi amplitudinea vibraţiilor, putând fi calculat şi pentru sisteme neliniare şi sisteme cu parametri dependenţi de frecvenţă.

Dacă x_1 şi x_2 sunt două amplitudini consecutive într-o vibraţie liberă amortizată, atunci energia acumulată în elementul elastic la aceste deplasări maxime este $U_1 = \frac{1}{2} k x_1^2$, respectiv $U_2 = \frac{1}{2} k x_2^2$. Pierderea de energie împărţită la energia iniţială este

$$\frac{U_1 - U_2}{U_1} = 1 - \frac{U_2}{U_1} = 1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = 1 - e^{-2\delta} \cong 2\delta$$

unde δ este decrementul logaritmic. Prin urmare, pentru amortizări mici, factorul de pierderi este aproximativ egal cu dublul decrementului logaritmic

$$\eta \cong 2\delta . \qquad (2.52, a)$$

2.4 Vibraţii forţate amortizate

În timpul vibraţiilor forţate amortizate, răspunsul este defazat în urma excitaţiei datorită disipării de energie prin amortizare. Răspunsul are amplitudine finită la rezonanţa de fază şi este defazat 90^0 în urma excitaţiei. Amplitudinea mişcării la rezonanţă este dependentă de amortizare iar lăţimea curbei de rezonanţă este direct proporţională cu amortizarea din sistem. În cazul vibraţiilor armonice, diagrama deplasare-forţă este o buclă de histerezis închisă, care pentru sisteme cu amortizare vâscoasă este o elipsă a cărei suprafaţă este o măsură a energiei disipate prin amortizare.

2.4.1 Vibrații staționare cu amortizare vâscoasă

Se consideră sistemul masă-arc-amortizor fixat la bază, solicitat de o forță armonică $F_0 \cos \omega t$ aplicată masei (fig. 2.26, *a*).

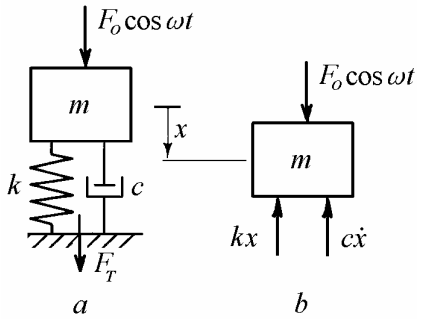


Fig. 2.26

Pe baza diagramei forțelor din fig. 2.26, *b* ecuația diferențială a mişcării se poate scrie sub forma

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k\,x = F_0 \cos \omega t\,. \tag{2.53}$$

Soluția completă a ecuației (2.53) constă din suma soluției (2.46) a ecuației omogene (2.38) şi o soluție particulară care are forma funcției excitației din membrul drept.

Datorită amortizării, soluția omogenă se anulează în scurt timp, rămânând doar soluția particulară care descrie o mişcare armonică având aceeaşi frecvență ca forța excitatoare şi un defazaj față de aceasta

$$x\,(t) = X \cos\,(\omega\, t - \varphi)\,. \tag{2.54}$$

Amplitudinea deplasării X şi defazajul φ dintre deplasare şi forță se obțin înlocuind soluția (2.54) în ecuația (2.53).

Deplasând toți termenii în membrul drept, se obține

$$m\omega^2 X \cos(\omega t - \varphi) + c\omega X \sin(\omega t - \varphi) - k\,X \cos(\omega t - \varphi) + F_0 \cos \omega t = 0\,.$$

Termenii din ecuația de mai sus reprezintă proiecții ale vectorilor forță pe o axă (orizontală) rotită cu unghiul ωt față de vectorul forței excitatoare (fig. 2.27).

Vectorul forței F_0 este rotit cu un unghi φ înaintea vectorului deplasare X. Forța elastică kX are sens opus deplasării, în timp ce forța de inerție $m\omega^2 X$

este în fază cu deplasarea. Forţa de amortizare $c\omega X$ este rotită cu 90^0 faţă de forţa elastică. În timpul vibraţiei, vectorii au poziţii relative fixe şi se rotesc împreună cu viteza unghiulară ω în sens trigonometric. Diagrama vectorilor rotitori (fazori) din fig. 2.27 este trasată pentru o pulsaţie excitatoare inferioară pulsaţiei de rezonanţă.

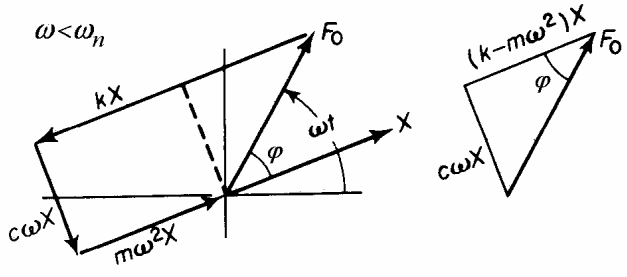


Fig. 2.27

Însumând proiecţiile vectorilor pe direcţia deplasării şi pe direcţia perpendiculară pe aceasta, se obţin ecuaţiile de echilibru dinamic

$$kX - m\omega^2 X = F_0 \cos\varphi\,, \qquad c\omega X = F_0 \sin\varphi\,. \tag{2.55}$$

O componentă a forţei excitatoare echilibrează forţa de amortizare în timp ce cealaltă componentă este necesară pentru echilibrarea forţei reactive, egală cu diferenţa între forţa elastică şi forţa de inerţie.

Rezolvând pentru X şi φ se obţine amplitudinea vibraţiilor forţate

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + \left(c\omega\right)^2}} = \frac{X_{st}}{\sqrt{\left[1 - \left(\omega/\omega_n\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\omega/\omega_n\right)^2}}, \tag{2.56}$$

şi tangenta unghiului de fază

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - \left(\omega/\omega_n\right)^2}, \tag{2.57}$$

unde

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \;\text{ şi }\; \zeta = c\big/2\sqrt{k\,m}\,.$$

Amplitudinea adimensională şi unghiul de fază sunt reprezentate grafic în fig. 2.28 pentru $F_0 = const.$ şi câteva valori are raportului de amortizare ζ.

Diagramele amplitudine-frecvență se numesc *curbe de rezonanță* sau *curbe de răspuns în frecvență*. O astfel de curbă începe din punctul de ordonată X_{st}, atinge valoarea maximă la pulsația de rezonanță, descreşte trecând prin valorile corespunzătoare pulsației proprii amortizate (2.47) şi pulsației proprii neamortizate (2.4), tinzând asimptotic spre zero odată cu creşterea pulsației.

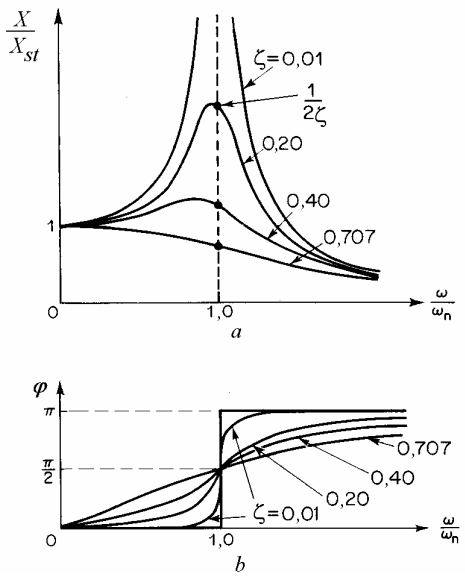


Fig. 2.28

Unghiul de fază dintre forța excitatoare şi deplasare variază de la zero, la pulsație nulă, devine 90^0 la pulsația proprie neamortizată, apoi tinde asimptotic la 180^0 pe măsura creşterii pulsației. La amortizări reduse, se observă o variație rapidă a defazajului la trecerea prin pulsația proprie.

În cazul amortizării subcritice, curba răspunsului în frecvență (fig. 2.28, *a*) are un vârf de rezonanță, care se spune că apare la *frecvența* (*pulsația*) *de rezonanță*. Pentru valori $\zeta > 0{,}707$, vârful de rezonanță este complet aplatisat. Sistemele amortizate supracritic nu au rezonanțe.

Este important de notat că "rezonanța amplitudinii" este definită la pulsația $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$ la care apare valoarea maximă $X_{max} = \dfrac{X_{st}}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$ a răspunsului staționar.

Prin definiție, "rezonanța fazei" apare la pulsația proprie neamortizată $\omega = \omega_n$ (când defazajul este 90^0) la care amplitudinea deplasării este $X_{rez} = \frac{X_{st}}{2\zeta}$. Pentru valori mici ale amortizării cele două rezonanțe coincid.

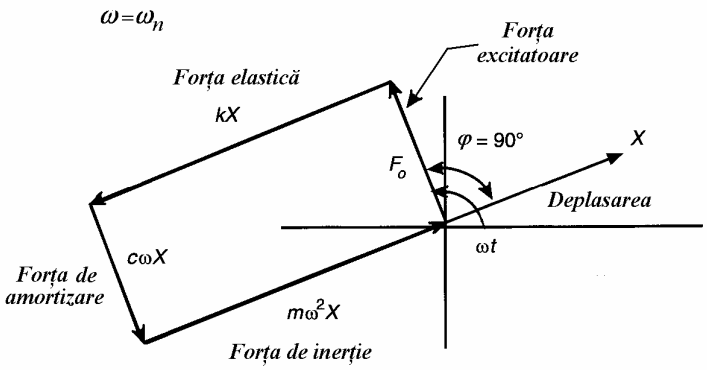


Fig. 2.29

Diagrama vectorială a forțelor la rezonanța de fază este prezentată în fig. 2.29. Forța elastică echilibrează forța de inerție a masei, iar forța excitatoare compensează doar forța de amortizare. Între masă şi arc are loc un schimb continuu de energie cinetică şi potențială. Forța exterioară ce trebuie aplicată pentru a menține sistemul în vibrație staționară este cea necesară pentru a suplini energia disipată prin amortizare.

La rezonanță, energia reactivă (din arc şi masă) este zero iar energia activă (efectiv disipată) este maximă. Din acest motiv la rezonanță este necesară o forță minimă pentru a menține o anumită amplitudine a deplasării. Pe o diagramă a rigidității dinamice (forța necesară pentru a produce o deplasare egală cu unitatea în punctul de aplicație) în funcție de pulsația excitatoare, rezonanța este marcată de un minim (ca în fig. 2.14).

2.4.2 Diagrama deplasare-forță

Se consideră (pentru simplificarea prezentării) deplasarea armonică în regim staționar de forma

$$x(t) = X \cos \omega t , \tag{2.58}$$

defazată cu un unghi φ față de forța excitatoare aplicată masei

$$f(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi). \tag{2.59}$$

Relaţiile (2.58) şi (2.59) sunt ecuaţiile parametrice ale unei elipse. Eliminând timpul între cele două expresii rezultă

$$\frac{x^2}{X^2}+\frac{f^2}{F_0^2}-2\frac{x}{X}\frac{f}{F_0}\cos\varphi=\sin^2\varphi\,. \tag{2.60}$$

Diagrama deplasare-forţă este o buclă de histerezis de formă eliptică (fig. 2.30), parcursă în sens trigonometric.

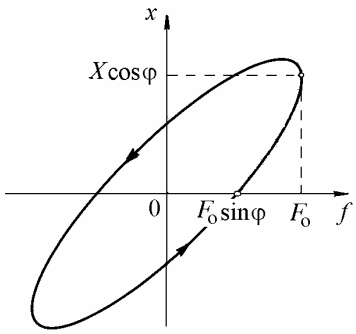


Fig. 2.30

Aria suprafeţei acestei elipse este o măsură a energiei disipate într-un ciclu de vibraţie. Aceasta este egală cu lucrul mecanic efectuat de forţa (2.59) pe deplasarea (2.58)

$$W_d=\int f\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi/\omega} f\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=-X\,F_0\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\varphi)\sin\omega t\,\mathrm{d}(\omega t),$$

$$W_d=\pi F_0 X\sin\varphi\,.$$

Utilizând a doua ecuaţie (2.55), expresia de mai sus devine

$$W_d=\pi c\,\omega X^2\,. \tag{2.61}$$

Pentru a produce lucru mecanic, forţa de amortizare $f_d=-c\dot{x}=\omega X\sin\omega t$ trebuie să fie defazată cu 90^0 faţă de deplasarea $x(t)=X\cos\omega t$.

Dacă deplasarea şi forţa sunt măsurate cu traductoare de vibraţii şi semnalele acestora sunt aplicate pe plăcile de deflecţie ale unui osciloscop (deplasarea în ordonată şi forţa în abscisă) imaginea obţinută pe ecran este o *figură Lissajous*. La frecvenţe joase figura este o linie dreaptă, a cărei pantă depinde de raportul amplitudinilor celor două semnale (fig. 2.31, *a*). Pe măsura creşterii pulsaţiei, linia dreaptă devine o elipsă (fig. 2.31, *b*) a cărei semiaxă mare creşte cu

pulsația. La pulsația proprie neamortizată (fig. 2.31, *c*) semiaxa mare a elipsei este verticală şi de amplitudine mare. La creşterea în continuare a pulsației, semiaxa mare continuă să se rotească dar descreşte în amplitudine (fig. 2.31, *d*). Lățimea elipsei descreşte până când, la pulsații mult deasupra rezonanței, elipsa degenerează din nou într-o linie dreaptă aproape paralelă cu axa orizontală (fig. 2.31, *e*).

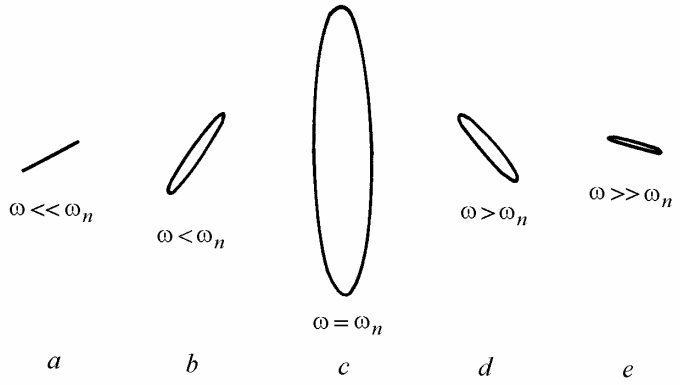


Fig. 2.31

La rezonanța fazei, $\omega = \omega_n$, $\varphi = 90^0$, $X_{res} = F_0 / 2\zeta k$, semiaxa mare a elipsei este verticală iar energia disipată prin amortizare este

$$W_d = \pi F_0 X_{res} = \pi c \omega_n X_{res}^2 . \qquad (2.62)$$

Energia disipată într-un ciclu de vibrație prin amortizare vâscoasă este proporțională cu pulsația excitatoare (ec. 2.61).

2.4.3 Amortizarea structurală

Experiențe cu structuri aeronautice şi diferite materiale arată că energia disipată într-un ciclu de vibrație este independentă de pulsație şi proporțională cu pătratul amplitudinii deplasării. Valorile amortizării în structuri inginereşti sunt relativ mici chiar la frecvențe de rezonanță înalte (de ordinul $\zeta = 0{,}02 - 0{,}05$). De asemenea, dacă toată amortizarea ar fi vâscoasă, atunci clopotele mici, care produc sunete înalte, ar reacționa la lovire cu un sunet înfundat, în locul unui clinchet. De aici rezultă că amortizarea vâscoasă, adoptată inițial datorită simplității matematice, trebuie înlocuită printr-un model în care energia disipată prin amortizare este independentă de frecvență. Acest tip de amortizare se numeşte *amortizare structurală* sau *histeretică*.

Utilizarea termenului amortizare "histeretică" este nepotrivită, deoarece toate mecanismele de amortizare conduc la o buclă de histerezis. De aceea în continuare se preferă termenul amortizare "structurală". Acesta implică o forță de sens opus care este *în fază cu viteza* însă, spre deosebire de amortizarea vâscoasă, are o amplitudine care nu este *proporțională* cu viteza ci *cu deplasarea*. Coeficientul de amortizare este invers proporțional cu pulsația, astfel că forța de amortizare este $-h\,\dot{x}/\omega$ (în loc de $-c\dot{x}$). Ecuația (2.53) devine

$$m\,\ddot{x} + \frac{h}{\omega}\,\dot{x} + k\,x = F_0 \cos \omega t\,, \tag{2.63}$$

unde h este un *coeficient de amortizare structurală*. Includerea pulsației ω în coeficientul vitezei $\dot{x}$ implică faptul că soluțiile sunt valabile numai la această pulsație. Ecuația de mişcare se mai poate scrie utilizând o rigiditate complexă $k^* = k + \mathrm{i}\,h$ (fiindcă s-a pus condiția de a avea o soluție armonică), sub forma

$$m\,\ddot{x} + (k + \mathrm{i}\,h)x = F_0\, e^{\mathrm{i}\omega t}\,. \tag{2.64}$$

Deoarece c este înlocuit prin h/ω, energia disipată pe ciclu este

$$W_d = \pi\, h\, X^2\,, \tag{2.65}$$

fiind independentă de pulsație.

Expresiile (2.56) şi (2.57) devin

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + h^2}} = \frac{X_{st}}{\sqrt{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right]^2 + g^2}}\,, \tag{2.66}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{h}{k - m\omega^2} = \frac{g}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\,, \tag{2.67}$$

unde $g = h\,/k$ este *factorul de amortizare structurală*.

2.4.4 Metoda punctelor de semi-putere

Curba de rezonanță a sistemului masă-arc-amortizor poate fi utilizată pentru determinarea raportului de amortizare (fig. 2.32).

La $\omega = \omega_n$ amplitudinea la rezonanță este $X_{rez} = \dfrac{X_{st}}{2\zeta}$. Pentru valori mici ale amortizării, vârful *M* coincide cu punctul care marchează rezonanța fazei.

Punctele *B* şi *C*, de ordonată $\left(\sqrt{2}/2\right)X_{rez}$ se numesc *punctele de semi-putere*. Aceasta deoarece pătratul amplitudinii este $(1/2)X_{rez}^2$, deci puterea disipată prin amortizare la pulsaţiile acestor puncte ω_1 şi ω_2, este jumătate din puterea disipată la rezonanţă.

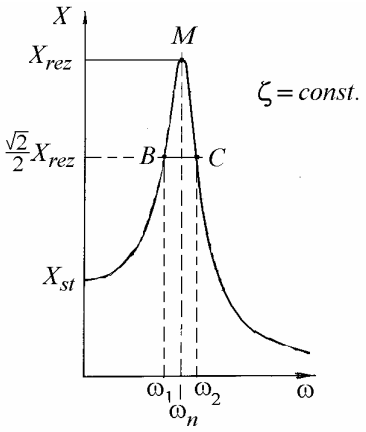


Fig. 2.32

Înlocuind în expresia (2.56) se obţine

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\zeta}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{\left(1-(\omega/\omega_n)^2\right)^2+(2\zeta\omega/\omega_n)^2}},$$

de unde rezultă ecuaţia

$$(\omega/\omega_n)^4 - 2\left(1-2\zeta^2\right)(\omega/\omega_n)^2 + \left(1-8\zeta^2\right) = 0.$$

Soluţiile ecuaţiei sunt pulsaţiile de semi-putere

$$(\omega/\omega_n)_{1,2}^2 = \left(1-2\zeta^2\right) \pm 2\zeta\sqrt{1+\zeta^2},$$

care pentru amortizări mici $\zeta << 1$ pot fi aproximate prin

$$(\omega/\omega_n)_{1,2}^2 \cong 1 \pm 2\zeta.$$

Notând

$$\omega_1^2 \cong \omega_n^2\left(1-2\zeta\right), \quad \omega_2^2 \cong \omega_n^2\left(1+2\zeta\right),$$

se obţine

$$2\zeta \cong \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \tag{2.68}$$

sau

$$2\zeta \cong \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_n^2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n}\frac{\omega_2 + \omega_1}{2\omega_n} \cong \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n},$$

deci raportul de amortizare este dat de expresia

$$\zeta \cong \frac{\Delta\omega}{2\omega_n}, \tag{2.69}$$

în care $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ este lățimea de bandă a curbei de rezonanță.

Pe baza formei curbei de rezonanță determinate experimental este dificil de stabilit dacă amortizarea este într-adevăr de tip vâscos. Dacă se consideră un singur grad de libertate şi mişcarea este armonică, atunci este convenabilă utilizarea conceptului de "amortizare vâscoasă echivalentă". În acest caz, coeficientul de amortizare vâscoasă are o astfel de valoare încât energia disipată într-un ciclu de deplasare armonică cu o anumită amplitudine şi frecvență, este aceeaşi ca cea disipată prin mecanismul real de amortizare, în acelaşi ciclu de deplasare. În relația (2.43) coeficientul *c* este atunci *coeficientul de amortizare vâscoasă echivalentă.*

2.4.5 Metoda masei adiționale

În vecinătatea unei rezonanțe izolate, comportarea unui sistem vibrator oarecare se aseamănă răspunsului unui sistem cu un grad de libertate. Masa şi rigiditatea sistemului echivalent pot fi determinate experimental prin *metoda masei adiționale*.

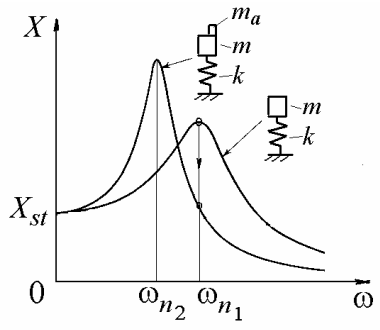


Fig. 2.33

Se trasează experimental două curbe de răspuns în frecvență, una pentru sistemul real, cealaltă pentru sistemul în care s-a adăugat o masă adițională

cunoscută m_a (fig. 2.33). Pulsațiile proprii ω_{n1} şi ω_{n2} se determină în punctele cu amplitudine maximă a deplasării.

Din relațiile corepunzătoare (2.4)

$$k = m\,\omega_{n1}^2, \tag{2.70}$$

$$k = \left(m + m_a\right)\omega_{n2}^2, \tag{2.71}$$

se poate obține masa echivalentă

$$m = \frac{m_a}{\left(\omega_{n1}^2 / \omega_{n2}^2\right) - 1}, \tag{2.72}$$

apoi, din relația (2.70), rigiditatea echivalentă *k*.

De notat că răspunsul la rezonanță al sistemului cu masa ataşată este mai mare deoarece pentru sistemul real

$$X_{rez_1} = \frac{F_0}{k}\frac{1}{2\zeta_1} = \frac{F_0}{c\omega_{n1}} = \frac{F_0}{c}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

iar pentru sistemul cu masa ataşată

$$X_{rez_2} = \frac{F_0}{k}\frac{1}{2\zeta_2} = \frac{F_0}{c\omega_{n2}} = \frac{F_0}{c}\sqrt{\frac{m+m_a}{k}}\,.$$

Dacă pulsația de lucru este în vecinătatea valorii ω_{n1}, atunci amplitudinea răspunsului forțat al sistemului poate fi micşorată adăugând o masă m_a.

2.4.6 Rezolvarea prin algebra complexă

În cazul excitației armonice, forța care acționează asupra masei sistemului din fig. 2.26 se poate scrie

$$f(t) = F_0 e^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{2.73}$$

astfel încât soluția staționară (2.54) devine

$$x(t) = \overline{X}\, e^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{2.74}$$

unde

$$\overline{X} = X e^{\mathrm{i}\theta} = X_R + \mathrm{i}X_I \tag{2.75}$$

este *amplitudinea complexă a deplasării*.

În relația (2.75), X este modulul, θ este unghiul de fază, X_R este componenta reală (în fază) şi X_I este componenta imaginară (în cuadratură)

$$X_R = X\cos\theta\,, \qquad X_I = X\sin\theta\,, \tag{2.76}$$

$$X = \sqrt{X_R^2 + X_I^2}\,, \qquad \mathrm{tg}\,\theta = X_I / X_R\,. \tag{2.77}$$

În cazul amortizării structurale, ecuația mişcării (2.63) devine

$$m\ddot{x} + \frac{h}{\omega}\dot{x} + k\,x = F_0 e^{\mathrm{i}\omega t}\,. \tag{2.78}$$

Înlocuind (2.73) şi (2.74) în (2.78) se obține

$$\left(-m\,\omega^2 + \mathrm{i}\,h + k\right)\overline{X} = F_0\,.$$

Amplitudinea complexă $\overline{X}$ are expresia

$$\overline{X} = \frac{F_0}{k - m\omega^2 + \mathrm{i}\,h} = \frac{X_{st}}{1-(\omega/\omega_n)^2 + \mathrm{i}\,g}\,, \tag{2.79}$$

unde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ şi $g = h/k$, astfel încât

$$X_R = \frac{1-(\omega/\omega_n)^2}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + g^2}}\,X_{st}\,, \quad X_I = \frac{-g}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + g^2}}\,X_{st} \tag{2.80}$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + g^2}}\,X_{st}\,, \qquad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{-g}{1-(\omega/\omega_n)^2}\,. \tag{2.81}$$

Eliminând pulsația ω între expresiile componentelor X_R and X_I rezultă

$$\left(X_I + \frac{1}{2g}X_{st}\right)^2 + X_R^2 = \left(\frac{1}{2g}X_{st}\right)^2\,. \tag{2.82}$$

Acest cerc este locul geometric al vârfului vectorului deplasării în planul complex.

2.4.7 Funcțiile răspunsului în frecvență

După cum răspunsul este o deplasare, viteză sau accelerație, există mai multe funcții de răspuns în frecvență (FRF) definite ca rapoarte complexe răspuns/excitație sau excitație/răspuns. Următoarele definiții sunt aproape general acceptate şi chiar standardizate :

deplasare / forță = receptanță,

viteză / forță = mobilitate,

accelerație / forță = acceleranță (inertanță),

forță / deplasare = rigiditate dinamică,

forță / viteză = impedanță mecanică,

forță / accelerație = masă aparentă.

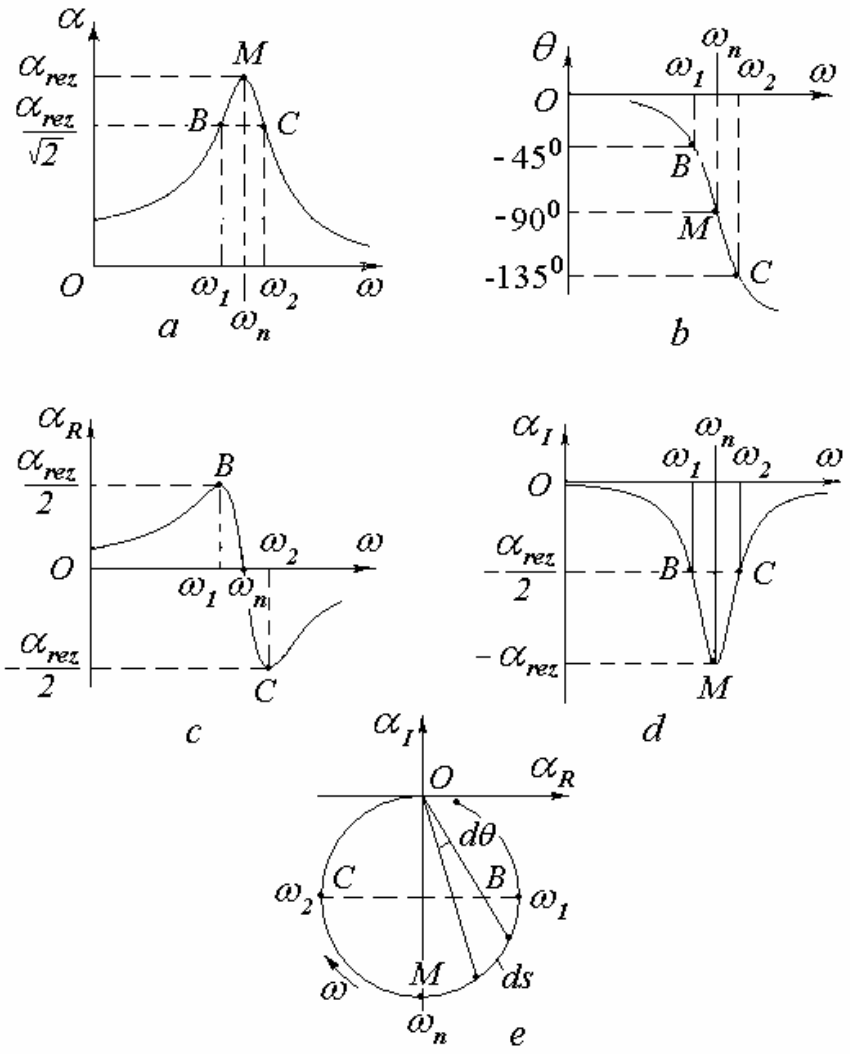


Fig. 2.34

Datorită caracterului armonic al mărimilor considerate, aceste funcții conțin de fapt aceeaşi informație despre sistemul în vibrație, putându-se stabili relații simple între ele.

În general, se folosesc trei tipuri de diagrame:

a) diagrame Bodé ale modulului FRF în funcție de frecvență *şi* ale unghiului de fază al FRF în funcție de frecvență;

b) diagrame ale părții reale a FRF în funcție de frecvență *şi* ale părții imaginare a FRF în funcție de frecvență;

c) diagrame Nyquist ale părții imaginare a FRF în funcție de partea reală a FRF, cu marcarea frecvenței în lungul curbei.

Pentru un sistem cu amortizare structurală, în fig. 2.34 se prezintă diagramele *receptanței* $\overline{\alpha} = \overline{X}/F_0$ pentru o valoare dată a factorului de amortizare. Rezonanța apare în punctul *M*, iar punctele de semi-putere sunt notate *B* şi *C*.

Diagrama Nyquist (fig. 2.34, *e*) este un cerc. Ea conține într-un singur grafic informația asupra amplitudinii şi unghiului de fază. În vecinătatea rezonanței scara frecvențelor este 'dilatată', astfel încât răspunsul între punctele de semi-putere este reprezentat pe un semicerc, indiferent de nivelul amortizării. Scăderea amortizării duce la creşterea diametrului cercului (pentru aceeaşi scară a amplitudinii) şi la expandarea scării frecvențelor.

Rezonanța este indicată de maxime în diagramele α (fig. 2.34, *a*) şi $|\alpha_I|$ (fig. 2.34, *d*), şi prin puncte de inflexiune (pantă maximă sau valoare maximă a derivatei în raport cu ω^2) în diagramele θ (fig. 2.34, *b*) şi α_R (fig. 2.34, *c*). Vârful în diagrama $|\alpha_I|$ este mai ascuțit decât în diagrama α. La rezonanță, $\theta = -90^0$ şi $\alpha_R = 0$. În diagrama Nyquist (fig. 2.34, *e*), rezonanța apare la intersecția cercului cu axa imaginară, în punctul unde viteza de variație a lungimii arcului de cerc în raport cu frecvența este maximă. Aceasta se bazează pe observația că derivata

$$\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\left(\omega^2/\omega_n^2\right)} = -\frac{1}{h}\,\frac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}\left(\omega^2/\omega_n^2\right)} = \frac{1}{k\left[\left(1-\omega^2/\omega_n^2\right)^2 + g^2\right]} = k\,\alpha^2 \qquad (2.83)$$

are o valoare maximă la rezonanță. Dacă sistemul este excitat cu o forță armonică iar receptanța este reprezentată grafic prin puncte, corespunzătoare unor creşteri egale ale pulsației $\Delta\omega$, atunci lungimea arcului Δs între două puncte succesive este maximă la rezonanță. Această proprietate formează baza teoretică a metodei dezvoltate de Kennedy şi Pancu (1945) pentru localizarea rezonanței.

Factorul de amortizare structurală se poate calcula cu relația (Broadbent şi Hartley, 1958)

$$g = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \qquad (2.84)$$

unde ω_1 şi ω_2 sunt pulsaţiile punctelor de extrem din diagrama $\alpha_R(\omega)$ sau ale capetelor diametrului *BC*, trasat perpendicular pe *OM,* în diagrama Nyquist.

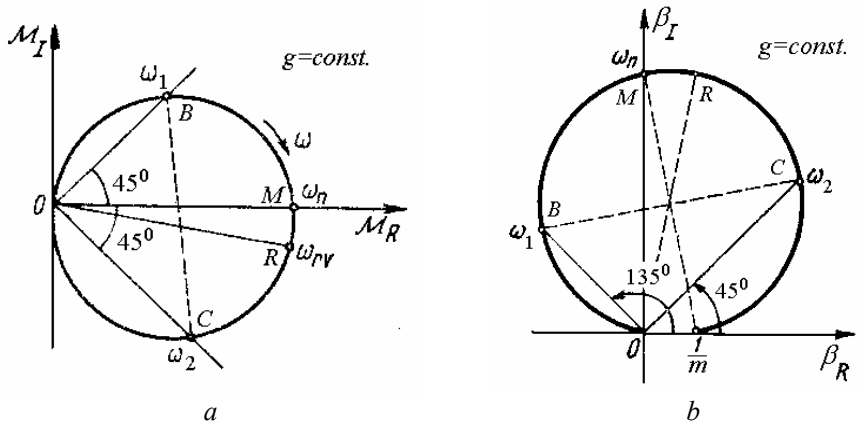
Rigiditatea se poate calcula pe baza valorii receptanţei α_{rez} la rezonanţă

$$k = \frac{1}{g}\frac{1}{\alpha_{rez}} = \frac{1}{g}\frac{F_0}{X_{rez}}. \qquad (2.85)$$

Deoarece în planul complex viteza este defazată 90^0 înaintea deplasării şi acceleraţia este defazată 90^0 înaintea vitezei, diagramele Nyquist ale mobilităţii şi acceleranţei sunt rotite 90^0 şi respectiv 180^0 în sens trigonometric faţă de diagrama polară a receptanţei.

Diagrama Nyquist a mobilităţii $\overline{M} = \mathrm{i}\,\omega\,\overline{X}/F_0 = M_R + \mathrm{i}\,M_I$, care nu este un cerc, este prezentată în fig. 2.35, *a*, fiind descrisă de următoarea ecuaţie

$$\left(M_R^2 + M_I^2\right)^2 - \frac{M_R^2}{g^2 k\, m} + \frac{M_R M_I}{g\, k\, m} = 0.$$



a *b*

Fig. 2.35

Diagrama Nyquist a acceleranţei $\overline{\beta} = -\omega^2\,\overline{X}/F_0 = \beta_R + \mathrm{i}\beta_I$ este prezentată în fig. 2.35, *b,* fiind un cerc de ecuaţie

$$\left(\beta_R - \frac{1}{2m}\right)^2 + \left(\beta_I - \frac{1}{2g\,m}\right)^2 = \frac{1+g^2}{4\,g^2 m^2}.$$

În ambele figuri s-au marcat punctele de semi-putere B şi C, şi punctul de amplitudine maximă a răspunsului R.

2.4.8 Diagrama polară a receptanței pentru amortizare vâscoasă

Receptanța este exprimată prin raportul între amplitudinea complexă a deplasării $\overline{X}$ şi amplitudinea forței armonice F_0. Utilizând, în locul lui $\overline{\alpha}$, notația generală pentru o funcție de răspuns în frecvență $H(\mathrm{i}\omega)$, în cazul amortizării vâscoase se obține

$$H(\mathrm{i}\omega)=\frac{\overline{X}}{F_0}=\frac{1}{k-m\omega^2+\mathrm{i}\omega c}=\frac{1/m}{\omega_n^2-\omega^2+\mathrm{i}2\zeta\omega\omega_n}. \tag{2.86}$$

La sisteme cu amortizare vâscoasă, diagrama Nyquist a receptanței nu mai este un cerc, ceea ce constituie un dezavantaj la identificarea parametrilor sistemului. Totuşi, se poate arăta că aceasta poate fi descompusă în două cercuri.

Relația (2.86) se poate scrie sub forma

$$H(\mathrm{i}\omega)=\frac{1/m}{(\mathrm{i}\omega-s_1)(\mathrm{i}\omega-s_2)}, \tag{2.87}$$

unde $s_{1,2}=-\sigma\pm\mathrm{i}\omega_d$ (2.48) sunt rădăcinile ecuației caracteristice (2.39).

Relația (2.87) se poate scrie ca o sumă de fracții parțiale

$$\frac{1/m}{(\mathrm{i}\omega-s_1)(\mathrm{i}\omega-s_2)}=\frac{C_1}{\mathrm{i}\omega-s_1}+\frac{C_2}{\mathrm{i}\omega-s_2}. \tag{2.88}$$

Înmulțind ambii membri ai relației (2.88) cu $(\mathrm{i}\omega-s_1)$ şi calculând rezultatul pentru $\mathrm{i}\omega=s_1$ se obține

$$\left.\frac{1/m}{(\mathrm{i}\omega-s_2)}\right|_{\mathrm{i}\omega=s_1}=C_1+C_2\left.\frac{\mathrm{i}\omega-s_1}{\mathrm{i}\omega-s_2}\right|_{\mathrm{i}\omega=s_1}.$$

Prin urmare

$$C_1=\frac{1/m}{s_1-s_2}=\frac{1/m}{(-\sigma+\mathrm{i}\omega_d)-(-\sigma-\mathrm{i}\omega_d)}=\frac{1/m}{\mathrm{i}2\omega_d}$$

şi similar

$$C_2=-\frac{1/m}{\mathrm{i}2\omega_d}.$$

Extrăgând un factor constant $\frac{1}{2\mathrm{i}}$ din expresia lui C_1 şi C_2, expresia (2.88) se poate scrie sub forma

$$H(\mathrm{i}\omega)=\frac{R}{2\,\mathrm{i}\,(\mathrm{i}\omega-s_1)}-\frac{R^*}{2\,\mathrm{i}\,(\mathrm{i}\omega-s_2)}, \tag{2.89}$$

unde steluța denotă conjugata complexă.

În acest caz, *reziduurile* sunt pur reale

$$R=R^*=\frac{1/m}{\omega_d}. \tag{2.90}$$

La sisteme cu mai multe grade de libertate, acestea sunt complexe conjugate.

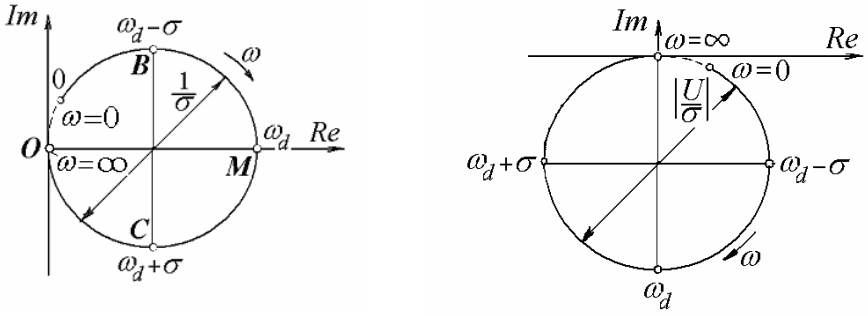
Expresia (2.89) se poate scrie

$$H(\mathrm{i}\omega)=\frac{U}{\sigma+\mathrm{i}\,(\omega-\omega_d)}+\frac{U^*}{\sigma+\mathrm{i}\,(\omega+\omega_d)}. \tag{2.91}$$

unde

$$U=-U^*=-\mathrm{i}\frac{1}{2m\omega_d}. \tag{2.92}$$

În continuare se va analiza diagrama Nyquist obținută pe baza expresiei (2.91).



a *b*

Fig. 2.36

Pentru a trasa diagrama primului termen al sumei (2.91)

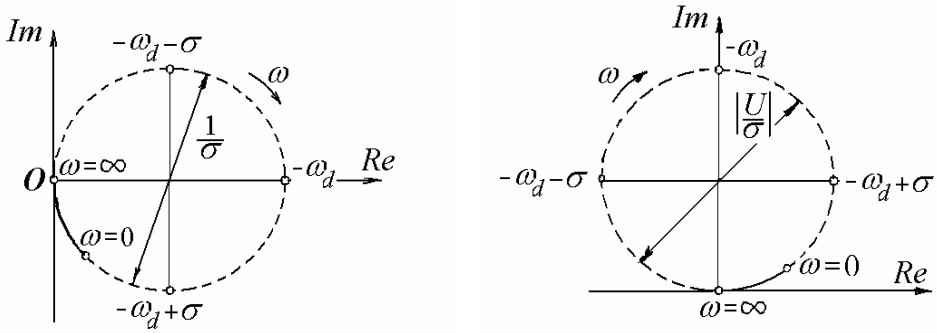
$$\frac{U}{\sigma+\mathrm{i}\,(\omega-\omega_d)}, \tag{2.93}$$

se consideră întâi diagrama corespunzătoare expresiei

$$\frac{1}{\sigma + \mathrm{i}\left(\omega - \omega_d\right)}. \tag{2.94}$$

În planul complex, expresia (2.94) reprezintă un cerc (fig. 2.36, *a*) cu centrul în punctul $\left(1/2\sigma, 0\right)$ şi diametrul $1/\sigma$. În punctul *M* de amplitudine maximă, adică în punctul de intersecție al cercului cu axa reală, pulsația este ω_d, pulsația proprie amortizată. Constanta de atenuare σ este egală cu intervalul de frecvențe măsurat de la punctul *M* la punctele *B* şi *C,* ai căror vectori fac unghiuri de $\pm 45^0$ cu vectorul răspuns din punctul *M*. La frecvențe negative, cercul este trasat cu linie întreruptă.

În continuare se consideră efectul numărului imaginar *U* de la numărătorul expresiei (2.93). Înmulțirea cu acest număr imaginar produce o rotație de 90^0 a diagramei în sens orar şi o dilatare sau contracție cu un factor $1/2m\omega_d$ (fig. 2.36, *b*). Cercul rezultant se numeşte *cercul cu pulsații predominant pozitive*. Centrul acestui cerc este în punctul $\left(0, -\left|U/2\sigma\right|\right)$ iar diametrul este $\left|\frac{U}{\sigma}\right| = \frac{1}{2k}\frac{1}{\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$. Porțiunea trasată cu linie întreruptă corespunde pulsațiilor negative.



a *b*

Fig. 2.37

Se consideră apoi al doilea termen al sumei (2.91)

$$\frac{U^*}{\sigma + \mathrm{i}\left(\omega + \omega_d\right)}. \tag{2.95}$$

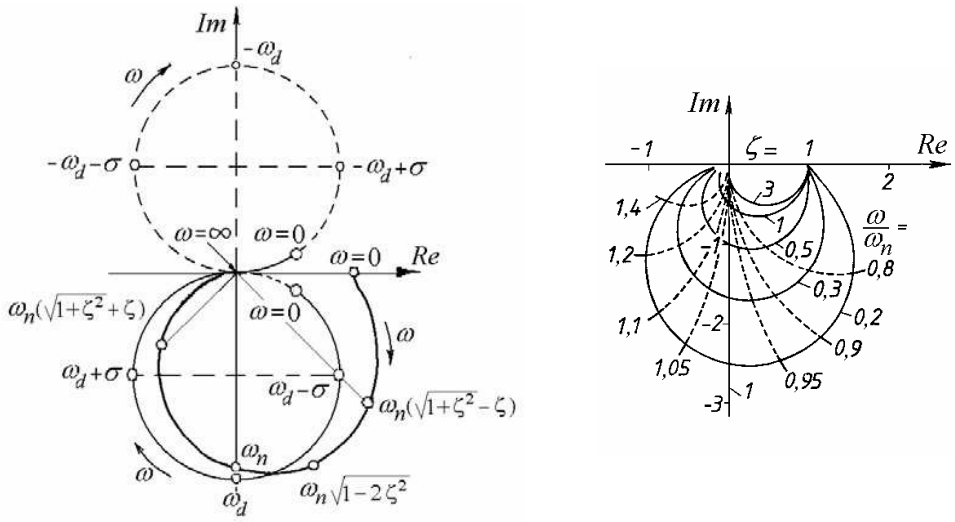
Diagrama polară a expresiei

$$\frac{1}{\sigma + \mathrm{i}\left(\omega + \omega_d\right)} \tag{2.96}$$

este prezentată în fig. 2.37, *a*.

Expresia (2.95) reprezintă de asemenea un cerc (fig. 2.37, *b*), numit *cercul cu pulsaţii predominant negative*. Acest cerc are acelaşi diametru cu cercul din fig. 2.36, *b* dar este rotit 90^0 în sens trigonometric faţă de axa reală. Arcul de cerc corespunzător pulsaţiilor pozitive reprezintă numai o mică parte din acest cerc. Restul cercului, corespunzător pulsaţiilor negative, este trasat cu linie întreruptă.

Combinând diagramele din fig. 2.36, *b* şi fig. 2.37, *b*, se obţine diagrama Nyquist din fig. 2.38, *a* (linie groasă), care nu mai este un cerc. Câteva astfel de diagrame sunt prezentate în fig. 2.38, *b* pentru diferite valori ale lui ζ.



a *b*

Fig. 2.38

Valoarea FRF (2.89) la pulsaţia proprie amortizată este

$$H(\mathrm{i}\omega_d)=\frac{R/2\,\mathrm{i}}{\sigma}-\frac{R^*/2\,\mathrm{i}}{\sigma+\mathrm{i}\,2\,\omega_d},$$

$$H(\mathrm{i}\omega_d)=\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left[\frac{1}{m\omega_d\sigma}-\frac{1}{m\omega_d(\sigma+\mathrm{i}\,2\,\omega_d)}\right]. \qquad (2.97)$$

Aceasta poate fi aproximată prin

$$H(\mathrm{i}\omega_d)\cong\frac{R}{\mathrm{i}\,2\sigma}=\frac{1}{\mathrm{i}\,2\sigma\,m\omega_d} \qquad (2.98)$$

deoarece al doilea termen în membrul drept al expresiei (2.97) tinde spre zero pentru valori mari ale lui ω_d.

De fapt, o serie de modele cu un grad de libertate pot fi reprezentate simplificat prin funcția

$$H(\mathrm{i}\omega) \cong \frac{R}{2\mathrm{i}\,(\omega - s_1)} = \frac{R}{2\mathrm{i}\,[\omega - (\sigma - \mathrm{i}\omega_d)]}. \tag{2.99}$$

2.4.9 Transmisibilitatea în sisteme amortizate

Dacă sistemul masă-arc-amortizor este excitat cinematic la bază cu o deplasare $x_1 = X_1 e^{\mathrm{i}\omega t}$, mişcarea transmisă masei este $x_2 = \overline{X}_2 e^{\mathrm{i}\omega t}$, unde $\overline{X}_2 = \left|\overline{X}_2\right| e^{-\mathrm{i}\varphi}$ este o amplitudine complexă. Ecuația diferențială a mişcării este

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

şi poate fi rearanjată sub forma

$$m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + k x_2 = c\dot{x}_1 + k x_1. \tag{2.100}$$

Raportul amplitudinilor este

$$\frac{\overline{X}_2}{X_1} = \frac{k + \mathrm{i}\omega c}{k - m\omega^2 + \mathrm{i}\omega c}. \tag{2.101}$$

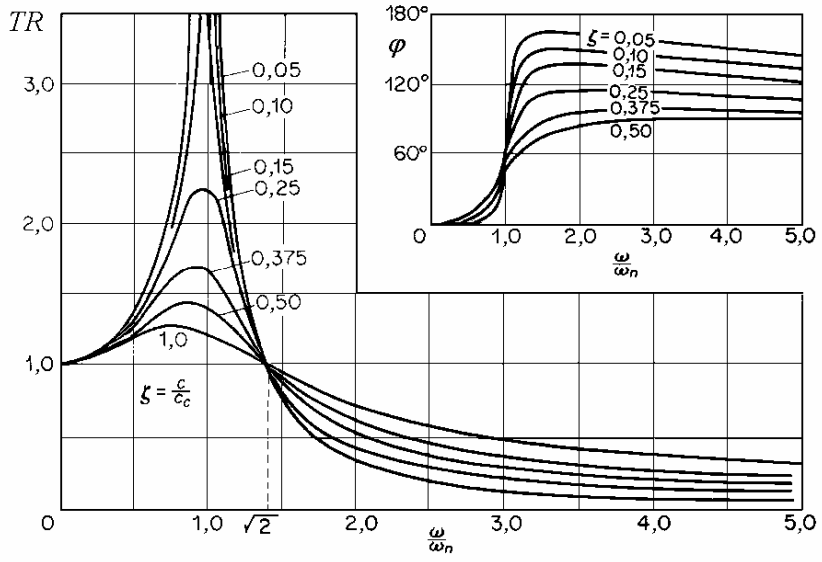


Fig. 2.39

Transmisibilitatea mişcării este

$$TR = \frac{|\overline{X}_2|}{X_1} = \frac{\sqrt{1+(2\zeta\omega/\omega_n)^2}}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+(2\zeta\omega/\omega_n)^2}}, \tag{2.102}$$

Defazajul între cele două mişcări este dat de

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)^3}{1-(\omega/\omega_n)^2+(2\zeta\omega/\omega_n)^2}. \tag{2.103}$$

Expresiile (2.102) şi (2.103) sunt reprezentate grafic în fig. 2.39 pentru câteva valori ale raportului de amortizare ζ.

Pentru $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$, *TR* este subunitară, ca în fig. 2.17, însă dacă amortizarea creşte, creşte şi transmisibilitatea, deci scade gradul de izolare. Diminuarea amortizării nu este o soluție eficientă deoarece, pentru a funcționa la pulsații $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$, sistemul trebuie să treacă prin rezonanță, unde amplitudinea este limitată de amortizare. În unele cazuri, există o amortizare redusă inerentă iar amplitudinile mari în vecinătatea rezonanței sunt eliminate prin limitatoare sau accelerarea prin rezonanță.

O problemă similară de izolare a vibrațiilor poate fi formulată pentru un sistem rezemat la bază şi excitat prin masă (fig. 2.26). Dacă forța excitatoare ce trebuie izolată este $F_0 e^{\mathrm{i}\omega t}$ (2.73), iar amplitudinea complexă a deplasării este $\overline{X}$ (2.74), atunci forța transmisă prin arc şi amortizor, legate în paralel, este armonică şi de amplitudine

$$F_T = \sqrt{(kX)^2+(c\omega X)^2} \tag{2.104}$$

astfel că *transmisibilitatea forţei*

$$TR = F_T/F_0 \tag{2.105}$$

este dată de expresia (2.102).

De observat că forța transmisă la bază prin arc şi amortizor este defazată față de forța elastică şi forța de amortizare.

2.4.10 Teoria captorilor seismici

Există două tipuri conceptual diferite de instrumente pentru măsurarea vibrațiilor: a) *aparate cu punct fix* sau *cvasi-statice*, care măsoară mişcarea vibratorie față de un punct de referință fix în spațiu, şi b) *captori seismici*, în care mişcarea vibratorie este măsurată față de masa unui sistem masă-arc-amortizor ataşat structurii în vibrație.

Captorul seismic (fig. 2.40) constă din suportul *S*, ataşat rigid de sistemul în vibraţie, sistemul masă-arc-amortizor *m-k-c*, şi traductorul *T*, care măsoară mişcarea relativă între masa seismică şi suport.

Se presupune că sistemul în vibraţie, deci şi baza captorului, efectuează o mişcare armonică

$$x_1(t) = X_1 \cos\, \omega t\,. \tag{2.106}$$

Neglijând termenii tranzitorii, deplasarea relativă între masa *m* şi suportul *S* poate fi scrisă sub forma

$$x_r(t) = X_r \cos\, (\omega t - \varphi). \tag{2.107}$$

Deplasarea absolută a masei *m*, faţă de un punct de referinţă fix, este

$$x_2 = x_1 + x_r$$

iar acceleraţia absolută este

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_r\,.$$

Ecuaţia de mişcare a masei *m* este

$$m\,(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_r) + c\,\dot{x}_r + k\,x_r = 0$$

sau

$$m\,\ddot{x}_r + c\,\dot{x}_r + k\,x_r = -m\,\ddot{x}_1 = m\,X_1\,\omega^2 \cos\, \omega t\,. \tag{2.108}$$

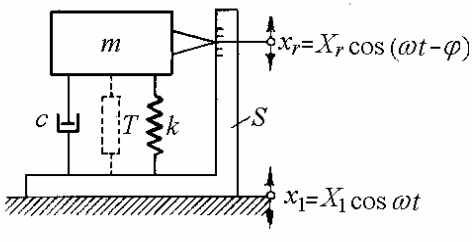


Fig. 2.40

Ecuaţia (2.108) are o soluţie staţionară pentru care

$$\frac{X_r}{X_1} = \frac{(\omega/\omega_n)^2}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + (2\zeta\,\omega/\omega_n)^2}}\,, \tag{2.109}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\zeta \omega / \omega_n}{1 - (\omega / \omega_n)^2} . \qquad (2.110)$$

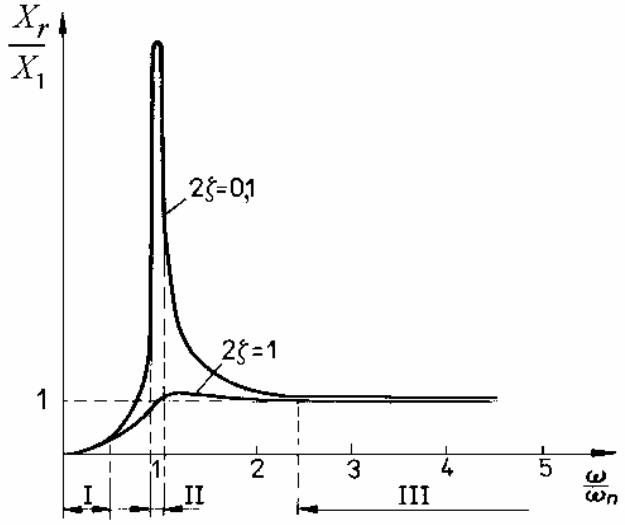


Fig. 2.41

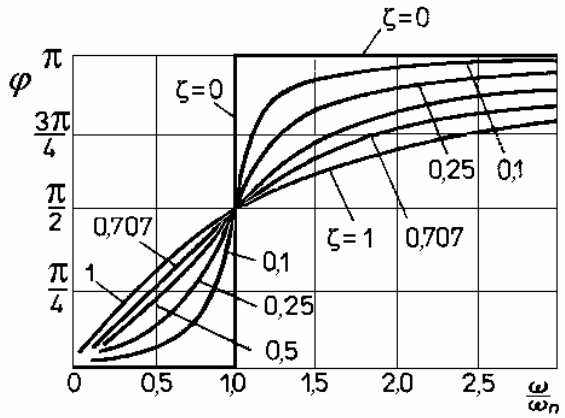


Fig. 2.42

În fig. 2.41 se arată variația raportului amplitudinilor (2.109) în funcție de pulsația adimensională ω/ω_n, pentru două valori ale raportului de amortizare. Figura 2.42 prezintă variația defazajului φ în funcție de ω/ω_n.

În funcție de domeniul de pulsații utilizat, captorul măsoară deplasarea, viteza sau accelerația.

Vibrometrul. În intervalul III, la pulsații $\omega >> \omega_n$, se observă că $X_r \cong X_1$, deci deplasarea relativă X_r între masă şi suport, măsurată de traductor, este practic egală cu deplasarea X_1 a structurii în vibrație. Figura 2.42 arată că, în acest domeniu de pulsații, defazajul este $\varphi = \pi$ pentru amortizare mică $(\zeta \to 0)$, astfel că masa *m* şi suportul vibrează defazate cu 180^0. Față de un sistem de referință inerțial (punct de referință fix) masa *m* rămâne aproape nemişcată (devine un "punct fix" în spațiu) iar mişcarea suportului este măsurată în raport cu masa.

Dacă *T* este un traductor de deplasări, instrumentul este un *captor seismic de deplasări* absolute (*vibrometru*). Dacă *T* este un traductor de viteze, atunci instrumentul devine un *captor de viteze*.

Captorii seismici de deplasări au frecvențe proprii joase (1-5 Hz) care se obțin cu valori mici ale rigidității *k*, deci cu o suspensie moale a masei seismice, respectiv cu mase *m* mari.

Accelerometrul. În intervalul I, la pulsații $\omega << \omega_n$, expresia (2.109) devine

$$X_r / X_1 \cong (\omega/\omega_n)^2,$$

sau

$$X_r \cong \frac{1}{\omega_n^2}\left(X_1\omega^2\right), \tag{2.111}$$

unde $X_1\omega^2$ este accelerația structurii în vibrație.

În acest caz, captorul măsoară o mărime direct proporțională cu accelerația absolută a structurii şi se numeşte *accelerometeru*. El are o frecvență proprie relativ mare, realizată cu o masă seismică mică şi cu un arc rigid.

În intervalul II, la $\omega \cong \omega_n$, masa vibrează cu amplitudini mari, proprietate utilizată în proiectarea frecvențmetrelor lamelare şi accelerometrelor folosite la măsurarea defectelor rulmenților.

Distorsiuni de amplitudine. Pentru a reproduce un semnal complex fără distorsiuni, toate componentele armonice trebuie amplificate în mod egal, indiferent de frecvență. Aceasta se poate realiza dacă raportul amplitudilor X_r/X_1

este aproape constant. Ca urmare, pentru fiecare captor se indică domeniul frecvenţelor de lucru în care distorsiunile sunt sub anumite limite.

Figura 2.43 prezintă o porţiune mărită a fig. 2.41, cu patru curbe trasate pentru diferite valori ale raportului de amortizare. Captorul cu $\zeta = 0{,}7$ are o curbă de răspuns orizontală până la $\omega/\omega_n = 4$. Distorsiunile de amplitudine fixează o limită inferioară a frecvenţelor vibraţiilor măsurate cu un captor de deplasări.

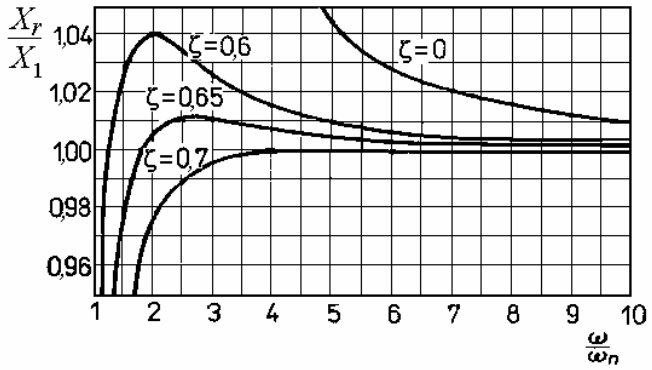


Fig. 2.43

Distorsiuni de fază. Pentru a reproduce un semnal complex fără modificarea formei în timp a acestuia, defazajele relative ale diferitelor componente armonice trebuie să fie egale. Aceasta se poate realiza dacă defazajul φ creşte liniar cu frecvenţa.

La un vibrometru, raportul ω/ω_n este relativ mare, şi unghiul φ este aproximativ 180^0 pentru toate armonicele, deci nu apar distorsiuni de fază. La un accelerometru, când raportul de amortizare este aproximativ egal cu $0{,}7$, există o relaţie aproape liniară între unghiul de fază şi pulsaţie, $\varphi \cong (\pi/2)(\omega/\omega_n)$. Această valoare a amortizării este folosită pentru minimizarea răspunsului tranzitoriu al captorului.

2.4.11 Precesia rotorului Laval cu amortizare externă

Se consideră mişcarea rotorului din fig. 2.18 sub acţiunea unei forţe de frecare generate de mişcarea relativă faţă de mediul ambiant staţionar. În timpul precesiei sincrone, punctele *C* şi *G* se rotesc în jurul axei lagărelor *O* cu o viteză unghiulară ω, aceeaşi ca viteza de rotaţie a arborelui în jurul lui *C*. Forţa de amortizare f_d se poate considera proporţională cu viteza tangenţială $r_C\omega$, deci $f_d = -c\, r_C \omega$, unde *c* este coeficientul de amortizare vâscoasă exterioară.

Diagrama forțelor care acționează asupra discului este prezentată în fig. 2.44. Forța de readucere elastică $k\,r_C$, datorită încovoierii arborelui, acționează pe direcția *CO*. Forța centrifugă $m\omega^2 r_G$, datorită excentricității $CG = e$, acționează pe direcția *OG*. Forța de amortizare vâscoasă este perpendiculară pe *OC*. Punctele *O*, *C* şi *G* nu mai sunt coliniare, iar linia *CG* devansează linia *OC* cu un unghi φ.

Echilibrul dinamic al celor trei forțe implică

$$m\omega^2\left(r_C + e\,\cos\varphi\right) = k\,r_C\,, \qquad m\omega^2 e\,\sin\varphi = c\,r_C\omega\,. \tag{2.112}$$

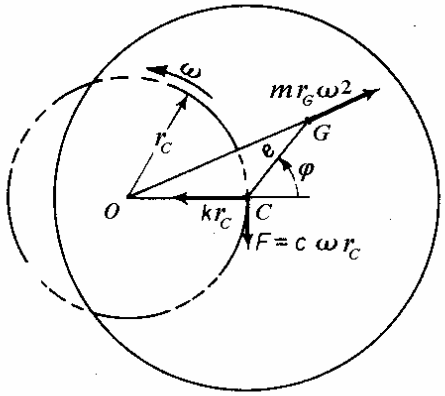


Fig. 2.44

Orbita circulară a punctului *C* are o rază

$$r_C = \frac{m\omega^2 e\,\cos\varphi}{k - m\omega^2} = e\frac{\left(\omega/\omega_n\right)^2}{\sqrt{\left[1-\left(\omega/\omega_n\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\,\omega/\omega_n\right)^2}}\,. \tag{2.113}$$

La turația critică, atunci când $\omega = \omega_n$, raza orbitei este $r_C = e/2\zeta$.

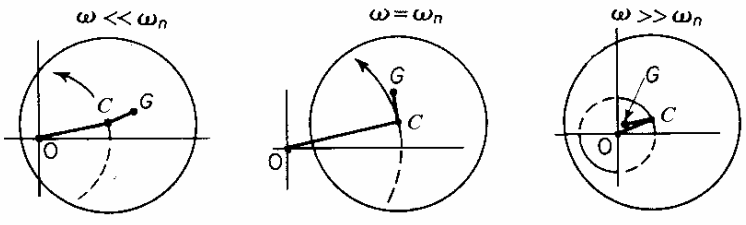


Fig. 2.45

Unghiul între segmentele *CG* şi *OC* este dat de

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \frac{2\zeta\,\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}\,. \qquad (2.114)$$

Unghiul φ creşte cu viteza unghiulară ω. Când $\omega < \omega_n$ (fig. 2.45, *a*), discul se roteşte cu punctul *G* în afara lui *C*. Cu creşterea turaţiei, lungimea segmentului *OC* creşte, şi *CG* se roteşte faţă de *OC*. La $\omega = \omega_n$, segmentul *CG* este rotit faţă de *OC* cu 90^0. Când $\omega > \omega_n$, discul se roteşte cu punctul *G* în interiorul cercului descris de *C*, iar lungimea segmentului *OC* descreşte. La turaţii foarte mari, punctul *G* coincide cu punctul *O*, raza r_C tinde spre *e,* iar arborele are o precesie în jurul centrului său de greutate.

2.4.12 Amortizarea ereditară

Amortizarea vâscoasă intervine în cel mai simplu model, care constă dintr-un amortizor legat în paralel cu un arc (fig. 2.26). numit modelul Kelvin-Voigt, cu amortizare *cuplată direct*.

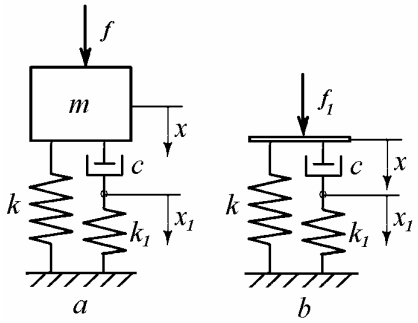


Fig. 2.46

Alte modele simple includ mecanisme de amortizare vâscoasă *cuplate elastic*. În *modelul Maxwell* cu trei parametri, amortizorul este legat în serie cu un al doilea arc (fig. 2.46, *a*). Sistemul are două grade de libertate.

Ecuaţiile de mişcare se scriu

$$m\,\ddot{x} + k\,x + c\,(\dot{x} - \dot{x}_1) = f\,, \qquad c\,(\dot{x} - \dot{x}_1) = k_1\,x_1\,. \qquad (2.115)$$

Pentru o excitaţie $f = F_0\,e^{\mathrm{i}\,\omega t}$, se presupun soluţii de forma

$$x = \overline{X}\,e^{\mathrm{i}\,\omega t}\,,\; x_1 = \overline{X}_1\,e^{\mathrm{i}\,\omega t}\,, \qquad (2.116)$$

unde $\overline{X}$ şi $\overline{X}_1$ sunt amplitudini complexe.

Ecuațiile (2.115) devin

$$\begin{aligned} \left(k - m\omega^2 + \mathrm{i}\,\omega\, c\right)\overline{X} - \mathrm{i}\,\omega\, c\,\overline{X}_1 &= F_0, \\ -\mathrm{i}\,\omega\, c\,\overline{X} + \left(k_1 + \mathrm{i}\,\omega\, c\right)\overline{X}_1 &= 0, \end{aligned} \tag{2.117}$$

şi pot fi rescrise sub forma

$$\begin{aligned} \left(1 - \eta^2 + \mathrm{i}\,2\zeta\eta\right)\overline{X} - \mathrm{i}\,2\zeta\eta\,\overline{X}_1 &= F_0/k, \\ -\mathrm{i}\,2\zeta\eta\,\overline{X} + \left(N + \mathrm{i}\,2\zeta\eta\right)\overline{X}_1 &= 0, \end{aligned} \tag{2.118}$$

unde s-a notat

$$\omega_n = \sqrt{k/m}\ ,\ \eta = \omega/\omega_n\ ,\ \zeta = c/2\,m\,\omega_n\ ,\ N = k_1/k\ . \tag{2.119}$$

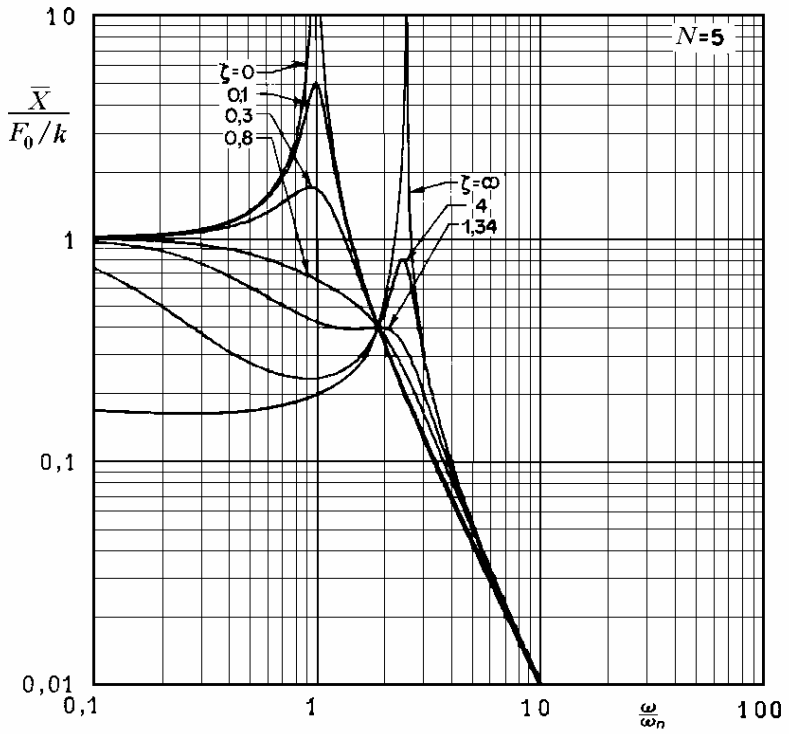


Fig. 2.47

Amplitudinea deplasării complexe a masei *m* este

$$\frac{\overline{X}}{F_0/k}=\frac{1+\mathrm{i}\,2\zeta\eta/N}{1-\eta^2+\mathrm{i}\left(2\zeta\eta/N\right)\left(N+1-\eta^2\right)}. \qquad (2.120)$$

Factorul de amplificare a deplasărilor

$$\frac{|\overline{X}|}{F_0/k}=\frac{\sqrt{1+\left(2\zeta\eta/N\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+\left(2\zeta\eta/N\right)^2\left(N+1-\eta^2\right)^2}}. \qquad (2.121)$$

este reprezentat grafic în fig. 2.47 pentru un raport al rigidităţilor $N=5$ şi diferite valori ale raportului de amortizare. Diagrama unghiului de fază corespunzător este prezentată în fig. 2.48.

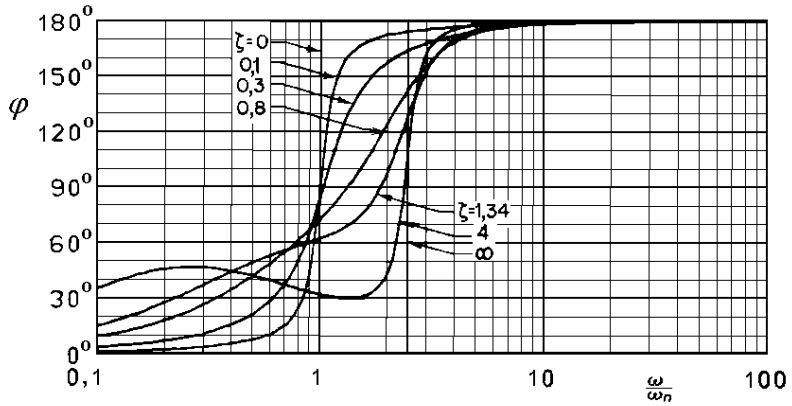


Fig. 2.48

Expresia (2.121) poate fi ridicată la pătrat şi scrisă sub forma

$$\left(\frac{|\overline{X}|}{F_0/k}\right)^2=\psi^2=\frac{C_1+\zeta^2 C_2}{C_3+\zeta^2 C_4}. \qquad (2.122)$$

sau

$$C_3\psi^2-C_1+\left(C_4\psi^2-C_2\right)\zeta^2=0. \qquad (2.123)$$

Toate curbele fascicolului reprezentat de ecuaţia (2.123) trec prin punctul de intersecţie al celor două curbe de ecuaţii

$$C_3\psi^2-C_1=0, \qquad C_4\psi^2-C_2=0.$$

Acestea pot fi exprimate sub forma

$$\psi = \sqrt{C_1/C_3}\,, \qquad \psi = \sqrt{C_2/C_4}\,,$$

sau

$$\frac{\left|\overline{X}\right|}{F_0/k} = \frac{1}{1-\eta^2}\,, \tag{2.124}$$

şi

$$\frac{\left|\overline{X}\right|}{F_0/k} = \frac{1}{N+1-\eta^2}\,. \tag{2.125}$$

Expresia (2.124) reprezintă curba (2.123) de parametru $\zeta = 0$. Expresia (2.125) reprezintă curba (2.123) de parametru $\zeta = \infty$. Cele două curbe se intersectează în punctul de abscisă $\eta = \sqrt{(N+2)/2}$ şi ordonată $\left|\overline{X}\right|/(F_0/k) = 2/N$. Toate curbele de răspuns în frecvenţă trec prin acest punct.

Figura 2.47 arată că mici variaţii ale amortizării pot produce variaţii însemnate ale pulsaţiei de rezonanţă. Această comportare este total diferită de cea a sistemelor cu amortizare vâscoasă cuplată direct (fig. 2.28), la care variaţia pulsaţiei de rezonanţă cu amortizarea este neglijabilă.

Pulsaţia de rezonanţă creşte de la $\eta = 1$ pentru $\zeta = 0$, la $\eta = \sqrt{1+N}$ pentru $\zeta = \infty$. Când amortizarea creşte, vârful răspunsului întâi descreşte, apoi creşte, ceea ce indică existenţa unei amortizări optime

$$\zeta_{opt} = N/\sqrt{2(N+2)}\,,$$

la care vârful de rezonanţă are amplitudine minimă, egală cu ordonata punctului de intersecţie al tuturor curbelor trasate pentru diferite valori ale raportului de amortizare.

Pentru $N > 2$ şi valori ale raportului de amortizare $0{,}7 < \zeta < \zeta_{opt}$, în curbele de răspuns în frecvenţă nu apare un vârf de rezonanţă.

Această comportare poate fi explicată analizând răspunsul dinamic al modelului cu trei parametri din fig. 2.46, *b*. Comportarea acestuia este descrisă de două ecuaţii

$$f_1 = k\,x + c\left(\dot{x} - \dot{x}_1\right), \tag{2.126}$$

$$c\left(\dot{x} - \dot{x}_1\right) = k_1\,x_1\,. \tag{2.127}$$

Deoarece nu interesează coordonata "ascunsă" x_1, care defineşte gradul de libertate interior, se rezolvă ecuaţia (2.127) pentru x_1 şi se înlocuieşte rezultatul în ecuaţia (2.126). Rezultă

$$f_1 = k\,x + \int_0^t G\left(t-\tau\right)\dot{x}\left(\tau\right)\,d\tau\,, \tag{2.128}$$

unde

$$G\left(t\right) = k_1\,e^{-\frac{k_1}{c}t} \tag{2.129}$$

cu presupunerea subînțeleasă că modelul este nesolicitat la $t = 0$.

În expresia (2.128) termenul care descrie amortizarea depinde de toată istoria variației în timp a vitezei; de aici denumirea de "amortizare ereditară".

Când forța f_1 este dată ca o funcție de timp, soluția ecuațiilor (2.126) şi (2.127) este

$$x\left(t\right) = \frac{f_1\left(t\right)}{k+k_1} + \frac{1}{c}\left(\frac{k_1}{k+k_1}\right)^2 \int_0^t e^{-\frac{\tau}{\tau_1}}\,f_1\left(t-\tau\right)\,d\tau\,, \tag{2.130}$$

unde "constanta de timp" a modelului este

$$\tau_1 = c\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k_1}\right).$$

Primul termen în membrul drept al expresiei (2.130) descrie răspunsul instantaneu, observat practic la multe sisteme amortizate.

În continuare se consideră răspunsul forțat la excitație armonică. Înlocuind soluțiile complexe (2.116) în ecuațiile (2.126) şi (2.127), apoi eliminând coordonata internă, se obține

$$f_1 = \bar{k}\,x\,, \tag{2.131}$$

unde rigiditatea complexă $\bar{k}$ este

$$\bar{k} = k + \mathrm{i}\frac{\omega\,c\,k_1}{k_1 + \mathrm{i}\,\omega\,c}\,. \tag{2.132}$$

Dacă în expresia (2.132) se separă partea reală şi cea imaginară, se obține forma corespunzătoare modelului cu amortizare vâscoasă cuplată direct

$$\bar{k} = k_e + \mathrm{i}\omega\,c_e\,, \tag{2.133}$$

unde *rigiditatea echivalentă* şi *coeficientul de amortizare vâscoasă echivalentă* sunt

$$k_e = k + k_1\frac{\omega^2 c^2}{k_1^2+\omega^2 c^2}\,, \qquad c_e = c\frac{k_1^2}{k_1^2+\omega^2 c^2}\,. \tag{2.134}$$

Modelul cu amortizare ereditară este astfel redus la un model Kelvin-Voigt cu parametri dependenți de frecvență. Rigiditatea echivalentă k_e creşte cu pulsația de la valoarea k şi tinde asimptotic spre $k + k_1$, în timp ce coeficientul de amortizare vâscoasă echivalentă c_e descreşte de la valoarea *c* la zero.

Energia disipată într-un ciclu de vibrație este

$$W_d = \pi X^2 \omega c_e = \pi X^2 \frac{\omega c k_1^2}{k_1^2 + \omega^2 c^2} \tag{2.135}$$

fiind nulă la $\omega = 0$ şi $\omega = \infty$, având o valoare maximă la $\omega_0 = k_1/c$ pulsație la care $c_e = c/2$.

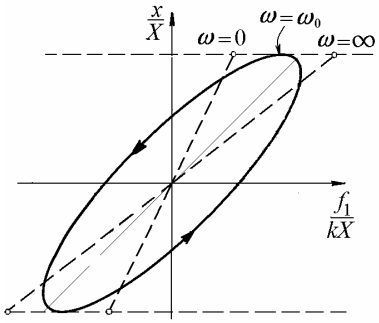


Fig. 2.49

Această comportare se regăseşte şi în curba de histerezis (fig. 2.49). La pulsație nulă aceasta este o dreaptă care corespunde unui arc de rigiditate *k*. La $\omega = \omega_0$ elipsa are suprafața maximă. Când pulsația tinde spre infinit, răspunsul este o dreaptă mai puțin înclinată, care corespunde unui arc de rigiditate $k + k_1$.

2.5 Sisteme cu rigiditate cubică

Sistemele vibratoare reale pot avea caracteristici neliniare. Forța elastică poate fi o funcție neliniară de deplasare, iar forța de amortizare poate fi o funcție neliniară de viteză sau deplasare. Dacă un sistem neliniar este acționat de o forță armonică, răspunsul staționar nu mai este armonic, ca la sisteme liniare, ci *periodic*, deci poate fi exprimat ca o sumă de componente armonice.

Sistemele cu neliniarități locale mici pot fi studiate folosind *metoda liniarizării echivalente*, în care se presupune că răspunsul este dominat de

componenta armonică fundamentală. Se consideră că răspunsul staționar constă dintr-o singură armonică la frecvența excitației, neglijând componentele subarmonice sau supraarmonice. Răspunsul forțat este studiat numai în vecinătatea aşa-numitei *rezonanțe principale*. Studiul sistemelor neliniare depăşeşte cadrul acestei lucrări. În continuare se descrie numai răspunsul armonic forțat al unui sistem cu rigiditate cubică.

2.5.1 Rigiditatea cubică

La sisteme fără preîncărcări şi fără jocuri, forța elastică poate fi reprezentată printr-o funcție cubică de deplasări

$$f_e = k\left(x + \mu x^3\right), \tag{2.136}$$

numită *caracteristica elastică a arcului*. Se spune (impropriu) că sistemul are o *rigiditate cubică*.

În expresia (2.136), k este panta în origine iar μ este un coeficient de neliniaritate. Coeficientul μ este pozitiv la sisteme cu *caracteristică tare* (cu pantă crescătoare) şi negativ la cele cu *caracteristică moale* (cu pantă descrescătoare).

Pentru o deplasare armonică

$$x(t) = a\cos\omega t\,, \tag{2.137}$$

forța elastică (2.136) devine $f_e = k\,a\left(\cos\omega t + \mu a^2\cos^3\omega t\right)$.

Înlocuind $\cos^3\omega t = \frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t$, şi neglijând termenul armonic superior în $\cos 3\omega t$, se obține

$$f_e \cong k\,a\left(\cos\omega t + \mu a^2\frac{3}{4}\cos\omega t + ...\right) = k_{ech}\,x\,,$$

unde rigiditatea echivalentă este

$$k_{ech} = k\left(1 + \frac{3}{4}\mu a^2\right). \tag{2.138}$$

Răspunsul dinamic al sistemului neliniar se poate obține introducând această rigiditate dependentă de amplitudinea deplasării în locul rigidității constante în ecuațiile obținute pentru sistemul liniar.

2.5.2 Răspunsul armonic

În fig. 2.50 se prezintă un sistem cu un grad de libertate, cu un arc neliniar şi un element disipativ cu amortizare structurală. Arcul are o caracteristică elastică tare, descrisă de o rigiditate cubică cu coeficient de neliniaritate pozitiv.

Dacă asupra masei acționează o forță armonică de amplitudine constantă F_0 şi pulsație ω, ecuația de mişcare de tip Duffing a masei se poate scrie sub forma

$$m\ddot{x} + \frac{h}{\omega}\dot{x} + k\left(x + \mu x^3\right) = F_0\, e^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{2.139}$$

unde $h = g\,k$, iar g este un *factor de amortizare structurală echivalentă*.

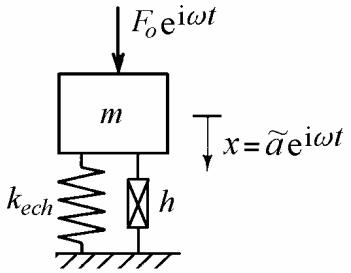


Fig. 2.50

Răspunsul este aproximat cu prima armonică

$$x = \tilde{a}\, e^{\mathrm{i}\omega t} = \left(a_R + \mathrm{i}\, a_I\right) e^{\mathrm{i}\omega t} = a\, e^{\mathrm{i}\left(\omega t + \theta\right)}. \tag{2.140}$$

Utilizând metoda liniarizării armonice, se neglijează armonicele de ordin superior, deci se consideră că

$$x^3 \cong \frac{3}{4} a^2 x. \tag{2.141}$$

Înlocuind (2.140) şi (2.141) în (2.139) se obțin componenta reală şi cea imaginară ale deplasării

$$a_R = \left(1 + \frac{3}{4}\mu a^2 - \eta^2\right)\frac{k}{F_0} a^2 = \mp\sqrt{a^2 - \left(\frac{g\,k\,a^2}{F_0}\right)^2}, \tag{2.142}$$

$$a_I = -g\,\frac{k}{F_0} a^2, \tag{2.143}$$

unde s-a notat

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_n}, \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{2.144}$$

Amplitudinea deplasării

$$a = \sqrt{a_R^2 + a_I^2} \tag{2.145}$$

este dată implicit de expresia

$$\eta^2 = 1 + \frac{3}{4}\mu a^2 \pm \sqrt{\frac{F_0^2}{k^2 a^2} - g^2} \ . \tag{2.146}$$

Unghiul de fază se calculează din relația

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{g}{\eta^2 - 1 - \frac{3}{4}\mu a^2} = \frac{g}{\pm\sqrt{\frac{F_0^2}{k^2 a^2} - g^2}} . \tag{2.147}$$

Eliminând a şi η^2 între expresiile (2.142) şi (2.143) se obține locul geometric al vârfului vectorului $\widetilde{a}$ în planul complex, care este un cerc de ecuație

$$a_R^2 + \left(a_I + \frac{1}{2g}\frac{F_0}{k}\right)^2 = \left(\frac{1}{2g}\frac{F_0}{k}\right)^2 . \tag{2.148}$$

Aceasta este identică cu ecuația (2.82) obținută pentru sisteme liniare.

Eliminând amplitudinea a între relațiile (2.143) şi (2.145) se obține dependența de frecvență a componentei imaginare a_I a deplasării

$$\eta^2 = 1 + \frac{3}{4}\mu\frac{F_0}{g\,k}(-a_I) \pm g\sqrt{\frac{F_0}{g\,k}\frac{1}{(-a_I)} - 1} \ . \tag{2.149}$$

Similar, dependența de frecvență a componentei reale a_R a deplasării se obține sub forma

$$\eta^2 = 1 + 3\mu\left(\frac{F_0}{2g\,k}\right)^2 - \frac{3\mu\left(\frac{F_0}{2g\,k}\right)^2 a_R^2 + \frac{F_0}{k}a_R}{2\left(\frac{F_0}{2g\,k}\right)^2\left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2g\,k}{F_0}\right)^2 a_R^2}\right]} . \tag{2.150}$$

2.5.3 Curbele răspunsului în frecvență

Pe baza relației (2.146), în fig. 2.51 s-au trasat curbele amplitudine-pulsație pentru o valoare $g = const.$ şi câteva valori F_0 ale amplitudinii forței armonice (care cresc în sensul săgeții).

Curbele de răspuns sunt dispuse simetric față de "curba schelet" de ecuație

$$\omega^2 = \omega_n^2\left(1+\frac{3}{4}\mu a^2\right) \tag{2.151}$$

care trece prin punctele de amplitudine maximă. La sisteme liniare, aceasta este o linie verticală de abscisă $\omega = \omega_n$. La sisteme cu caracteristică tare $(\mu > 0)$, curba schelet se "apleacă" spre pulsațiile înalte. La sisteme cu caracteristică moale $(\mu < 0)$, curba schelet se "apleacă" spre pulsațiile joase.

Locul geometric al punctelor cu tangentă verticală de pe curbele amplitudine-pulsație are ecuația

$$\eta^2 = 1+\frac{3}{4}\mu a^2 \pm \sqrt{\frac{9}{16}\mu^2 a^4 - g^2} \tag{2.152}$$

şi defineşte "limita de stabilitate" *XLKY* (Fig. 2.51).

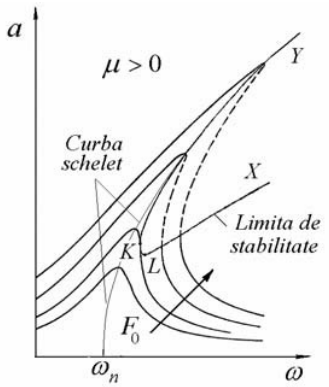


Fig. 2.51

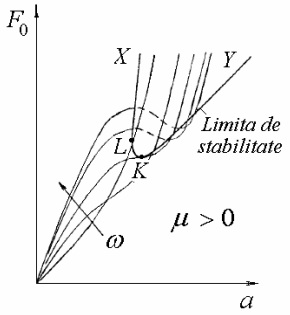


Fig. 2.52

Punctele situate în interiorul regiunii delimitate de această curbă definesc regimuri instabile de vibrație. Pe curbele de răspuns aceste puncte corespund porțiunilor trasate cu linie întreruptă.

Aceeaşi informație este redată în fig. 2.52 unde s-au trasat curbele forță-deplasare la diferite pulsații (care cresc în sensul săgeții) şi $g = const$. Acestea sunt *curbe de pulsație constantă*, numite şi *izocrone*. Limita de stabilitate este definită de locul geometric al punctelor cu tangentă orizontală. Punctul *K* defineşte amplitudinea maximă a forței pentru care vibrațiile sunt stabile indiferent de amplitudinea deplasării. Punctul *L* defineşte amplitudinea maximă a deplasării pentru care vibrațiile sunt stabile indiferent de nivelul forței.

Curbele fază-pulsație din fig. 2.53 se bazează pe expresia (2.147). Limita de stabilitate *XLKY* este definită de ecuația

$$\eta^2 = 1 + \frac{g}{2}\left(\operatorname{tg}\theta + \frac{3}{\operatorname{tg}\theta} \right), \tag{2.153}$$

care este locul geometric al punctelor cu tangentă verticală în fig. 2.53.

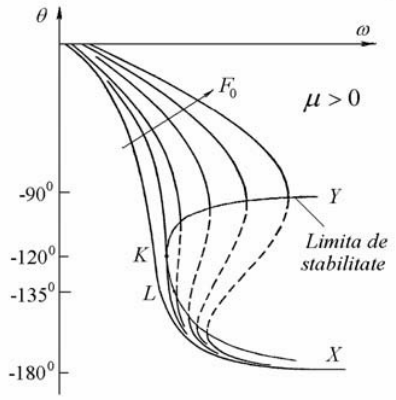


Fig. 2.53

Curbele polare ale răspunsului în frecvență sunt prezentate în fig. 2.54, în coordonate $a_I - a_R$. O astfel de reprezentare combină în aceeaşi diagramă informația asupra amplitudinii, fazei şi pulsației vibrației, iar regiunea din vecinătatea rezonanței ocupă o mare parte a curbelor.

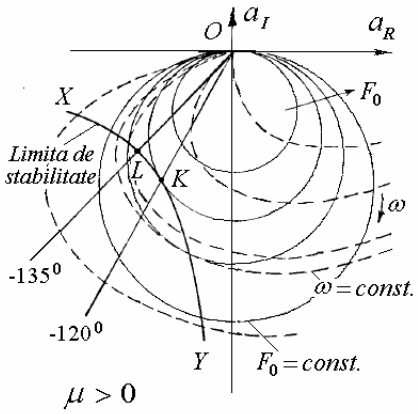


Fig. 2.54

La sisteme neliniare se recomandă trasarea diagramelor *deplasării* şi nu cele ale *receptanței* (deplasare/forță) sau altor FRF. Fiecare punct reprezentat în

planul complex este definit de doi parametri – pulsația excitatoare, ω, şi amplitudinea forței F_0. Ca urmare, se pot trasa două familii de curbe de răspuns, *izocronele* – care unesc punctele cu aceeaşi pulsație şi diagramele Nyquist – care unesc punctele cu nivel constant al excitației. Deoarece atât amplitudinea deplasării cât şi unghiul de fază sunt funcții de amplitudinea forței, deviația acestor curbe de la linia dreaptă poate fi utilizată ca un indicator al comportării neliniare. În general, faza este mult mai sensibilă la neliniarități decât amplitudinea.

În fig. 2.54, izocronele sunt trasate cu linii întrerupte. Ecuația lor se obține eliminând F_0 între expresiile (2.142) şi (2.143). Rezultă

$$a_R = \left[\eta^2 - 1 - \frac{3}{4}\mu \left(a_R^2 + a_I^2 \right) \right] \frac{a_I}{g} . \qquad (2.154)$$

Pentru $\mu = 0$, deci pentru sisteme liniare, ecuația (2.154) descrie linii drepte care trec prin originea coordonatelor. Pentru $\mu \neq 0$, ecuația (2.154) descrie curbe care trec prin origine, având deviații de la forma rectilinie cu atât mai pronunțate cu cât F_0 este mai mare, ajungând să fie tangente la curbele Nyquist.

Locul geometric al punctelor de tangență ale diagramelor Nyquist cu izocronele defineşte limita de stabilitate *XLKY*. Aceasta este o hiperbolă de ecuație

$$a_R \, a_I = \frac{2g}{3\mu} \qquad (2.155)$$

(definită numai pentru $a_R < 0$, $a_I < 0$), simetrică față de bisectoarea $a_R = a_I$ a axelor de coordonate.

Limita de stabilitate *XLKY* intersectează bisectoarea $a_R = a_I$ în punctul *L*, de pulsație $\omega_L = \omega_n \sqrt{1+2g}$, la o distanță $a_L = \sqrt{4g/3\mu}$ de origine. La pulsații joase şi amplitudini mici ale deplasării nu apar fenomene de salt.

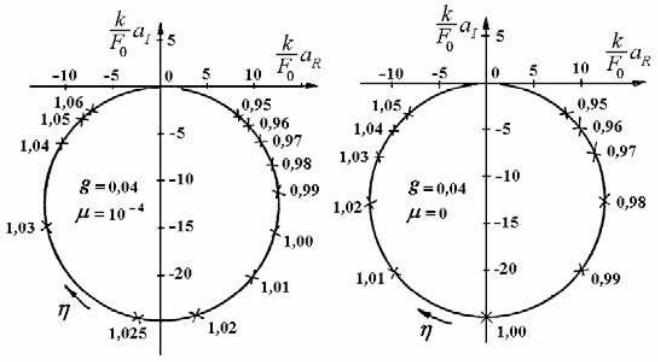


Fig. 2.55

Punctul *K*, unde curba limită de stabilitate este tangentă la curba Nyquist de parametru $F_0 = k\sqrt{32\,g^3 / \left(9\sqrt{3}\,\mu\right)}$ şi la izocrona de parametru $\omega_K = \omega_n \sqrt{1+\sqrt{3g}}$, indică forța minimă şi pulsația minimă la care pot apare vibrații instabile. Acest punct corespunde unui unghi de fază $\theta_K = -120^0$. Punctele *K* şi *L* sunt marcate şi în fig. 2.51 – 2.53.

Efectul rigidității neliniare este o "deplasare a frecvențelor" în lungul diagramelor circulare Nyquist, în sens orar - pentru arcuri cu caracteristică moale, şi în sens trigonometric – pentru arcuri cu caracteristică tare, aşa cum se arată în fig. 2.55. Rezonanța principală $(\eta = 1)$ nu mai apare în punctul de amplitudine maximă a deplasării. Dacă pe diagramele Nyquist se marchează puncte la intervale egale de pulsație, atunci arcul de lungime maximă între două puncte succesive nu mai apare la rezonanța principală, deci criteriul Kennedy-Pancu nu mai poate fi utilizat pentru localizarea rezonanței.

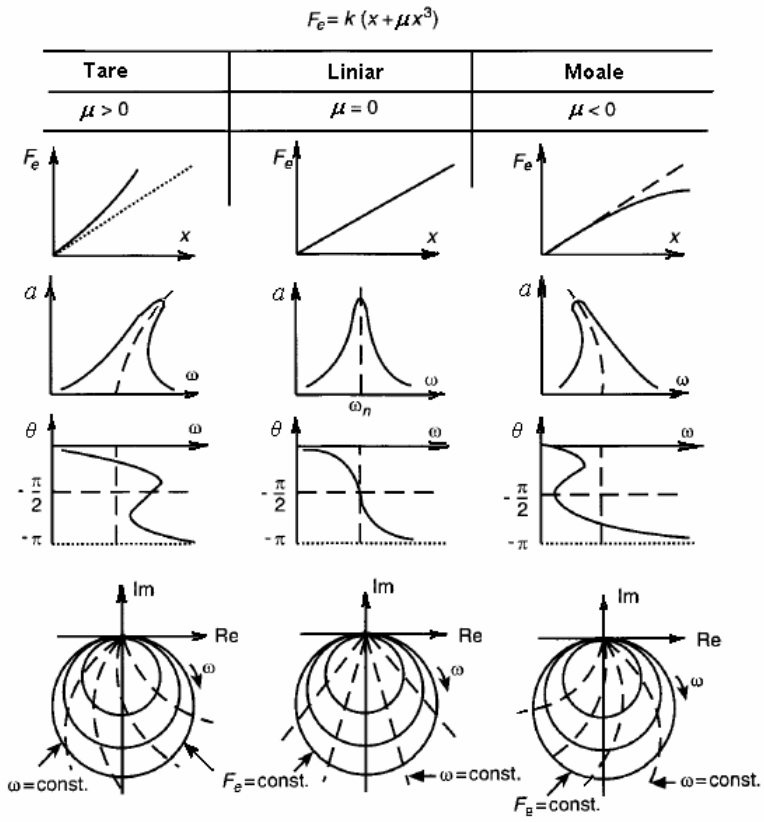


Fig. 2.56

La sistemele cu un grad de libertate, cu rigiditate cubică şi amortizare structurală, diagramele Nyquist sunt cercuri ca la sistemele liniare. Neliniaritatea distorsionează izocronele care nu mai sunt linii drepte, ca la sistemele liniare, ci curbe în formă de "vârtej".

Izocronele sunt curbate în sens trigonometric la sisteme cu caracteristică tare, şi în sens orar, la sisteme cu caracteristică moale (fig. 2.56). Această proprietate poate fi utilizată la identificarea tipului neliniarității.

2.5.4 Fenomene de salt

La sisteme cu rigiditate neliniară, variația pulsației sau amplitudinii forței excitatoare produce variații bruşte de amplitudine şi fază, numite fenomene de "salt", care nu se întâlnesc la sisteme liniare.

Un prim tip de fenomene de salt apare atunci când amplitudinea forței armonice F_0 este menținută constantă iar pulsația excitatoare variază lent (fig. 2.57, *a*). Pe măsură ce pulsația creşte de la valoarea zero, amplitudinea deplasării creşte, vârful vectorului deplasare parcurge porțiunea *BF* a diagramei Nyquist corespunzătoare până ajunge la limita de stabilitate în punctul *C*. Urmează un "salt" al amplitudinii şi fazei din *C* în *D*, în lungul izocronei $\omega_s = const.$, după care vârful vectorului revine pe diagrama Nyquist şi parcurge arcul *DO*.

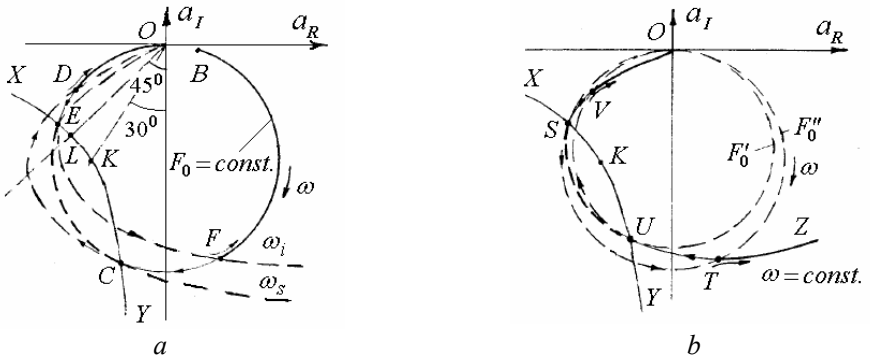


Fig. 2.57

Dacă pulsația are valori foarte mari şi apoi scade, vârful vectorului deplasare parcurge arcele *ODE* şi *FB* pe diagrama Nyquist, şi "sare" din *E* în *F* în lungul izocronei $\omega_i = const.$ Arcele *BF* şi *DO* ale diagramei Nyquist definesc regimuri *stabile* de vibrații, arcele *FC* şi *ED* definesc regimuri de vibrație *condiționat stabile*, în timp ce arcul *CE* defineşte regimuri *instabile* de vibrație. De aici rezultă că, în prezența neliniarităților puternice, porțiuni însemnate ale curbei de răspuns în frecvență nu pot fi obținute experimental.

Un alt fenomen de salt apare când pulsaţia excitatoare este menţinută constantă şi variază amplitudinea forţei armonice aplicate sistemului (fig. 2.57, *b*). Când amplitudinea forţei F_0 creşte progresiv, amplitudinea răspunsului creşte. Vârful vectorului deplasare parcurge izocrona respectivă (arcul *OVS*) până la limita de stabilitate în punctul *S*. Urmează un salt din *S* în *T*, în lungul diagramei Nyquist $F_0'' = const.$, după care vârful vectorului urmează izocrona (arcul *TZ*).

Când amplitudinea forţei descreşte, vârful vectorului deplasare parcurge porţiunea *ZTU* a izocronei până la limita de stabilitate în punctul *U*, de unde sare în punctul *V*, urmând cercul $F_0' = const.$ după care revine pe izocronă de la *V* la *O*.

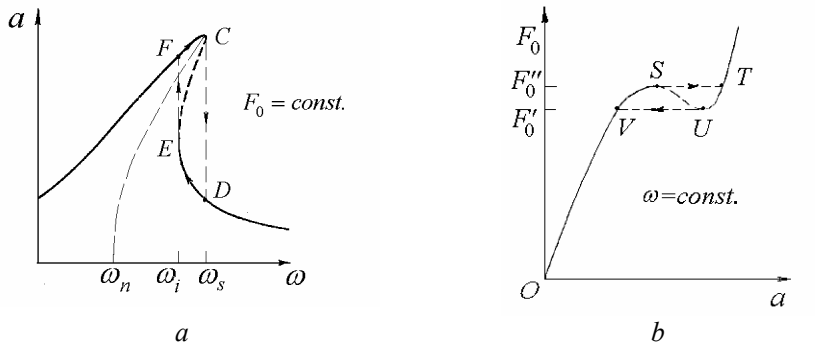


Fig. 2.58

Cele două fenomene de salt sunt reprezentate în fig. 2.58, *a* pe o curbă amplitudine-pulsaţie şi în fig. 2.58, *b* pe o curbă forţă-deplasare.

2.6 Vibraţii tranzitorii

În acest paragraf se studiază răspunsul la excitaţii *nearmonice* al sistemelor cu un grad de libertate neamortizate. Excitaţiile pot fi forţe aplicate masei sau deplasări, viteze sau acceleraţii aplicate bazei (suportului) sistemului, fie brusc, rămânând apoi constante, fie cu variaţii bruşte ale amplitudinii pe o durată limitată. Ele se numesc *şocuri* dacă durata lor de variaţie este mai mică decât perioada proprie de oscilaţie a sistemului; în caz contrar se numesc *excitaţii tranzitorii*.

2.6.1 Răspunsul la forţe impulsive aplicate masei

Dacă se neglijează amortizarea şi pentru condiţii iniţiale nule, deplasarea produsă prin excitarea masei unui sistem liniar masă-arc cu o forţă arbitrară $F(t)$ este dată de integrala lui Duhamel (2.21)

$$x(t)=\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F(\tau)\,\sin\omega_n(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad (2.156)$$

în care *m* este masa sistemului şi ω_n este pulsaţia proprie neamortizată (2.4).

2.6.1.1 Răspunsul la o forţă aplicată brusc

Se consideră un sistem masă-arc solicitat de o forţă constantă $F(t)=F_0$ aplicată brusc masei, sub forma unui *impuls treaptă dreptunghiulară* (fig. 2.59, *a*).

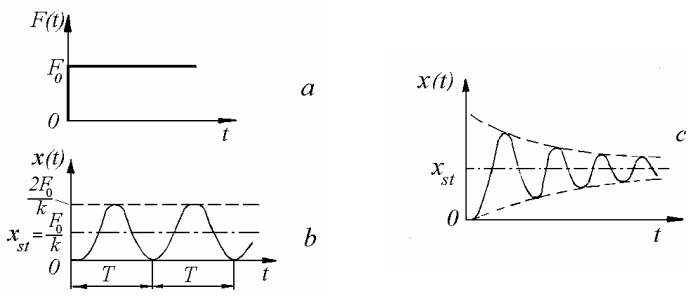


Fig. 2.59

Înlocuind forţa constantă în relaţia (2.156), se obţine expresia deplasării masei *m*

$$x\,(t)=\frac{F_0}{k}\left(1-\cos\omega_n t\,\right), \qquad (2.157)$$

reprezentată grafic în fig. 2.59, *b*.

Sistemul vibrează liber în jurul poziţiei de echilibru static $x_{st}=F_0/k$. Răspunsul maxim al sistemului neamortizat este dublu faţă de cel produs de o forţă F_0 aplicată static. Dacă se ţine seama de amortizarea inerentă în sistem, amplitudinea deplasării masei *m* scade în timp şi devine egală cu x_{st} după amortizarea completă a vibraţiilor (fig. 2.59, *c*).

2.6.1.2 Răspunsul la un impuls rampă

În majoritatea cazurilor practice, forţa aplicată creşte de la zero la valoarea nominală F_0 într-un timp (diferit de zero) t_1, numit *timp de creştere*.

Variaţia în timp a forţei

$$F(t) = F_0 \frac{t}{t_1}, \quad \text{pentru} \quad 0 \le t \le t_1,$$
$$F(t) = 0, \quad \text{pentru} \quad t \ge t_1, \tag{2.158}$$

defineşte un impuls de tip *rampă limitată* (fig. 2.60) sau un impuls de tip treaptă cu timp de creştere t_1.

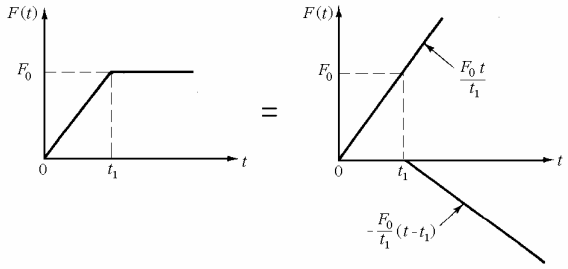


Fig. 2.60

Excitaţia poate fi considerată ca suma a două funcţii de tip rampă

$$F_1(t) = F_0 \frac{t}{t_1} \tag{2.159}$$

şi

$$F_2(t) = 0 \quad \text{pentru} \quad 0 \le t \le t_1,$$
$$F_2(t) = -F_0 \frac{t - t_1}{t_1}, \quad \text{pentru} \quad t \ge t_1. \tag{2.160}$$

Răspunsul la forţa $F_1(t)$, notat $x_1(t)$, se calculează înlocuind expresia (2.159) în integrala lui Duhamel (2.156)

$$x_1(t) = \frac{F_0 \omega_n}{k t_1} \int_0^t \tau \sin \omega_n (t - \tau)\, \mathrm{d}\tau = \frac{F_0}{k}\left(\frac{t}{t_1} - \frac{1}{\omega_n t_1} \sin \omega_n t \right).$$

Similar, răspunsul la forţa $F_2(t)$, notat $x_2(t)$, se calculează înlocuind expresia (2.160) în integrala (2.156)

$$x_2(t) = -\frac{F_0}{m\omega_n} \int_{t_1}^t \frac{\tau - t_1}{t_1} \sin \omega_n (t - \tau)\, \mathrm{d}\tau = -\frac{F_0}{k}\left[\frac{t - t_1}{t_1} - \frac{\sin \omega_n (t - t_1)}{\omega_n t_1} \right].$$

Răspunsul total, egal cu suma $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, este deci

$$x(t)=\frac{F_0}{k}\left(\frac{t}{t_1}-\frac{1}{\omega_n t_1}\sin\omega_n t\right), \qquad \text{pentru} \quad t\le t_1 , \tag{2.161}$$

$$x(t)=\frac{F_0}{k}\left[1-\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n t_1}+\frac{\sin\omega_n(t-t_1)}{\omega_n t_1}\right], \quad \text{pentru} \quad t>t_1 . \tag{2.162}$$

Se observă că în cazul aplicării lente (cvasistatice) a forței, când $\omega_n t_1$ are valori mari, oscilațiile sunt mici şi răspunsul este aproximativ egal cu valoarea statică.

Din punct de vedere practic, interesează valoarea maximă a răspunsului tranzitoriu. Deoarece deobicei timpii de creştere sunt foarte mici, se poate admite că răspunsul maxim apare la $t=t_m$ care este mai mare ca t_1. Derivând expresia (2.162) în raport cu timpul şi anulând derivata, se obține timpul la care apare deplasarea maximă, exprimat sub formă adimensională

$$\frac{t_m}{t_1}=\frac{1}{\omega_n t_1}\operatorname{arctg}\frac{1-\cos\omega_n t_1}{\sin\omega_n t_1} . \tag{2.163}$$

Pentru $\omega_n t_m>\pi$ se calculează

$$\begin{aligned}\sin\omega_n t_m &= -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\omega_n t_1\right)},\\ \cos\omega_n t_m &= -\frac{\sin\omega_n t_1}{\sqrt{2\left(1-\cos\omega_n t_1\right)}} .\end{aligned} \tag{2.164}$$

Înlocuind (2.164) în (2.162) se obține deplasarea maximă raportată la deplasarea statică

$$\frac{x_{max}}{F_0/k}=1+\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{1-\cos\omega_n t_1}}{\omega_n t_1}, \tag{2.165}$$

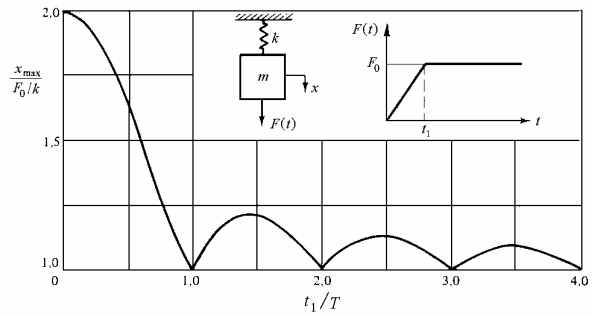
care se mai poate scrie sub forma

$$\frac{x_{max}}{F_0/k}=1+\frac{T}{\pi t_1}\left|\sin\frac{\pi t_1}{T}\right| . \tag{2.165, a}$$

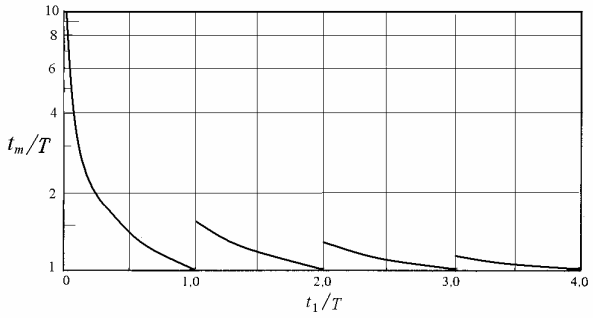
În fig. 2.61, *a* se prezintă variația raportului x_{max}/x_{st} în funcție de raportul adimensional

$$\frac{t_1}{T}=\frac{\omega_n t_1}{2\pi} , \tag{2.166}$$

în care T este perioada proprie de vibrație a sistemului masă-arc. În fig. 2.61, *b* se arată variația raportului t_m/T în funcție de t_1/T.



a



b

Fig. 2.61

Când $\omega_n t_1 \to 0$, raportul x_{max}/x_{st} tinde spre 2, valoare obţinută pentru forţa constantă aplicată brusc. Când $\omega_n t_1 \to \infty$, acest raport tinde spre 1, valoare corespunzătoare aplicării statice a forţei. Când $\cos\omega_n t_1 = 1$, sau $\omega_n t_1 = n\pi$ $(n = 0,2,4,..)$, rampele produc un raport x_{max}/x_{st} egal cu 1, deci răspuns fără vibraţii.

2.6.1.3 Răspunsul la un impuls triunghiular descrescător

Se consideră sistemul masă-arc solicitat de o forţă $F(t)$ având o variaţie în timp ca în fig. 2.62, exprimată analitic sub forma

$$F(t) = F_0\left(1 - \frac{t}{t_d}\right), \quad \text{pentru} \quad 0 \le t \le t_d,$$
$$F(t) = 0, \quad \text{pentru} \quad t \ge t_d, \tag{2.167}$$

unde t_d este durata impulsului.

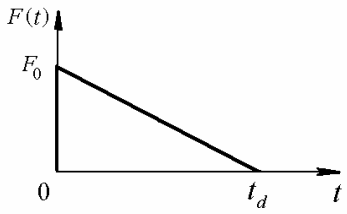


Fig. 2.62

a) *Faza I*. Pentru $t \le t_d$, deci pe durata cât acționează forța, înlocuind expresia (2.167) în (2.156), deci pentru condiții inițiale nule, după efectuarea calculelor rezultă

$$x(t) = \frac{F_0}{k}(1 - \cos \omega_n t) + \frac{F_0 t}{k t_d}\left(\frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t} - 1\right). \qquad (2.168)$$

b) *Faza II*. Pentru $t \ge t_d$, deci după încetarea acțiunii forței, condițiile inițiale ale mişcării se determină înlocuind $t = t_d$ în expresia (2.168) şi în expresia derivatei acesteia în raport cu timpul. Se obține

$$x(t_d) = x_o = \frac{F_0}{k}\left(\frac{\sin \omega_n t_d}{\omega_n t_d} - \cos \omega_n t_d\right), \qquad (2.169)$$

$$\dot{x}(t_d) = v_o = \frac{F_0}{k}\left(\omega_n \cdot \sin \omega_n t_d + \frac{\cos \omega_n t_d}{t_d} - \frac{1}{t_d}\right). \qquad (2.170)$$

Substituind expresiile (2.169) şi (2.170) în ecuația mişcării libere neamortizate (2.6) şi înlocuind $t \to (t - t_d)$, se obține

$$x(t) = \frac{F_0}{k\,\omega_n t_d}\left[\sin \omega_n t_d - \sin \omega_n (t - t_d)\right] - \frac{F_0}{k}\cos \omega_n t\,. \qquad (2.171)$$

Anulând derivata în raport cu timpul a funcției $x(t)$, se obține timpul t_m, măsurat din momentul aplicării forței, după care apare răspunsul maxim. Înlocuind această valoare în expresia deplasării, se obține răspunsul maxim

$$x_{max} = x(t_m). \qquad (2.172)$$

Pentru impulsuri de foarte scurtă durată $(t_d / T < 0{,}4)$, răspunsul maxim apare în faza răspunsului liber (faza *II*). Altfel, el apare pe durata aplicării impulsului (faza *I*).

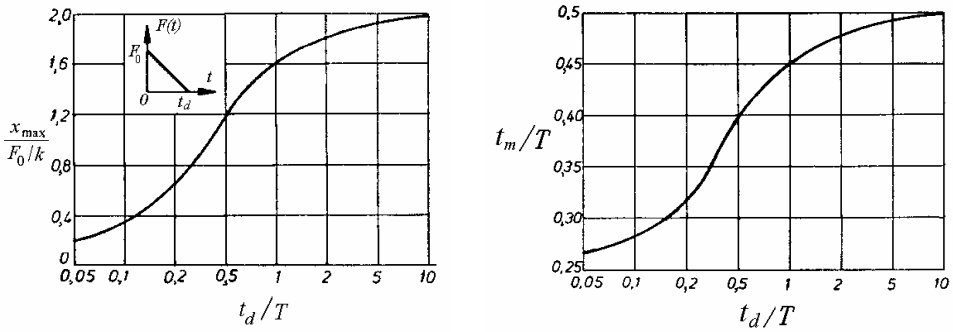


Fig. 2.63

În fig. 2.63, *a* se prezintă variația răspunsului maxim în funcție de raportul t_d/T, unde $T = 2\pi/\omega_n$ este perioada proprie de vibrație a sistemului. În fig. 2.63, *b* se arată variația raportului t_m/T în funcție de t_d/T.

Aceste diagrame sunt deosebit de utile în proiectare, deoarece este suficient să se cunoască perioada proprie de vibrație T şi durata impulsului t_d pentru a se calcula timpul de răspuns maxim t_m şi valoarea răspunsului maxim.

2.6.1.4 Răspunsul la un impuls dreptunghiular

Se consideră sistemul masă-arc solicitat de o forță $F(t)$ având o variație în timp ca în fig. 2.64, exprimată analitic sub forma

$$\begin{aligned} F(t) &= F_0\,, \quad \text{pentru} \quad 0 \le t \le t_d\,, \\ F(t) &= 0, \quad \text{pentru} \quad t \ge t_d\,, \end{aligned} \tag{2.173}$$

unde t_d este durata impulsului.

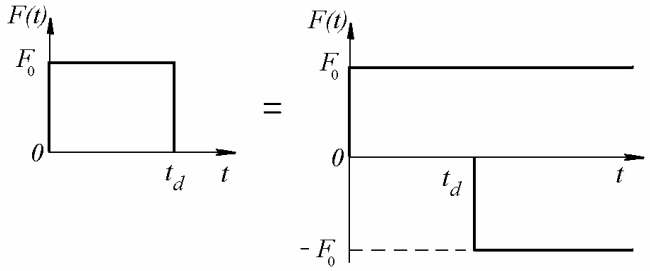


Fig. 2.64

Aplicarea forței F_0 pe durata t_d este echivalentă cu aplicarea bruscă a forței F_0 la momentul $t = 0$, urmată de aplicarea bruscă a forței $-F_0$ la momentul $t = t_d$. Deplasarea produsă de prima forță este de forma (2.157)

$$x_1(t) = \frac{F_0}{k}(1 - \cos \omega_n t).$$

Deplasarea produsă de a doua forță, pentru $t > t_d$, se obține înlocuind F_0 cu $-F_0$ şi t cu $t - t_d$ în (2.157)

$$x_2(t) = -\frac{F_0}{k}\left[1 - \cos \omega_n (t - t_d)\right].$$

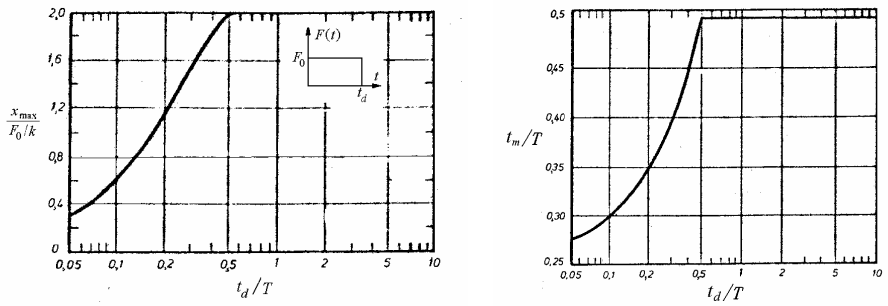
Deplasarea totală este $x = x_1$ pentru $0 \le t \le t_d$, iar pentru $t \ge t_d$ este

$$x(t) = x_1 + x_2 = \frac{F_0}{k}\left[\cos \omega_n (t - t_d) - \cos \omega_n t\right]$$

sau

$$x(t) = 2\frac{F_0}{k} \sin \frac{\omega_n t_d}{2} \sin \omega_n \left(t - \frac{t_d}{2}\right). \qquad (2.174)$$

În fig. 2.65, *a* se prezintă variația răspunsului maxim în funcție de raportul t_d/T, iar în fig. 2.65, *b* se arată variația raportului t_m/T în funcție de t_d/T.



a *b*

Fig. 2.65

Se observă că dacă durata aplicării forței este mai mare decât semiperioada proprie de vibrație, deplasarea atinge valoarea maximă $x_{max} = 2x_{st}$ încă în timpul aplicării impulsului dreptunghiular. Dacă $t_d < T/2$, atunci deplasarea maximă se

obține după încetarea acțiunii impulsului dreptunghiular şi are valoarea $x_{max} = 2x_{st} \sin \dfrac{\omega_n t_d}{2}$.

2.6.2 Răspunsul la excitație prin şoc aplicată suportului

Sistemul din fig. 2.66 este excitat la bază cu accelerația $\ddot{u}$.

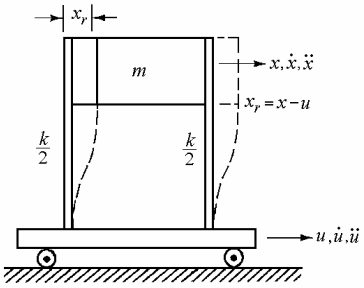


Fig. 2.66

Ecuația mişcării masei *m* se scrie

$$m\ddot{x} + k(x - u) = 0, \tag{2.175}$$

$$m(\ddot{u} + \ddot{x}_r) + k x_r = 0,$$

sau

$$m\ddot{x}_r + k x_r = -m\ddot{u}. \tag{2.176}$$

În ecuația deplasării relative, membrul drept are rolul forței din ecuația deplasării absolute a masei sub acțiunea unei forțe exterioare aplicate masei.

Rezultă că în cazul excitației cinematice la bază cu accelerația $\ddot{u}$, deplasarea relativă a masei se poate calcula cu integrala lui Duhamel (2.21) în care forța $F(\tau)$ se înlocuieşte cu $-m\ddot{u}(\tau)$

$$x_r(t) = -\frac{1}{\omega_n} \int_0^t \ddot{u}(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) \, \mathrm{d}\tau. \tag{2.177}$$

Accelerația relativă a masei este

$$\ddot{x}_r = -\omega_n^2 x_r = \omega_n \int_0^t \ddot{u}(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) \, \mathrm{d}\tau. \tag{2.178}$$

2.6.2.1 Răspunsul la un impuls triunghiular simetric

Se consideră sistemul din fig. 2.66 excitat la bază cu accelerația $\ddot{u}(t)$ având o variație în timp ca în fig. 2.67, exprimată analitic sub forma

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) &= a\,\frac{2}{t_d}t\,, && \text{pentru} \quad 0 \le t \le \frac{t_d}{2}, \\ \ddot{u}(t) &= a\,\frac{2}{t_d}\left(t_d - t\right), && \text{pentru} \quad \frac{t_d}{2} \le t \le t_d\,. \end{aligned} \tag{2.179}$$

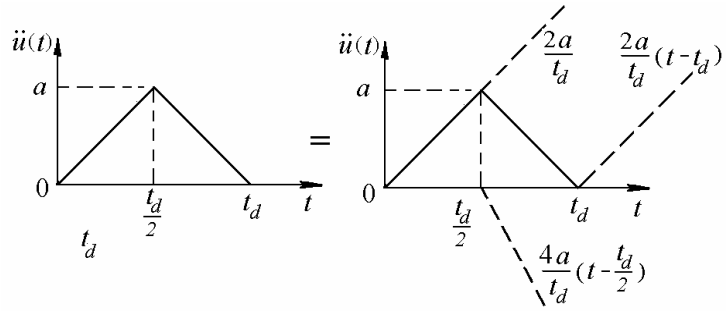


Fig. 2.67

Impulsul triunghiular simetric poate fi considerat suma a trei funcții de tip rampă (fig. 2.67). Suprapunând răspunsurile calculate cu integrala lui Duhamel stabilită pentru condiții inițiale nule, cu înlocuirea argumentului întârziat, se obțin următoarele expresii pentru accelerația relativă a masei

$$\frac{\ddot{x}_r(t)}{a} = \frac{2}{t_d}\left(t - \frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\right), \qquad 0 \le t \le \frac{t_d}{2}\,, \tag{2.180}$$

$$\frac{\ddot{x}_r(t)}{a} = \frac{2}{t_d}\left\{t_d - t + \frac{1}{\omega_n}\left[2\sin\omega_n\left(t - \frac{t_d}{2}\right) - \sin\omega_n t\right]\right\}, \quad \frac{t_d}{2} \le t \le t_d\,, \tag{2.181}$$

$$\frac{\ddot{x}_r(t)}{a} = \frac{2}{\omega_n t_d}\left[2\sin\omega_n\left(t - \frac{t_d}{2}\right) - \sin\omega_n t_d - \sin\omega_n\left(t - t_d\right)\right], \qquad t \ge t_d\,. \tag{2.182}$$

În fig. 2.68 se prezintă variația în timp accelerației relative a masei pentru trei valori diferite ale raportului $t_d/T = \omega_n t_d/2\pi$.

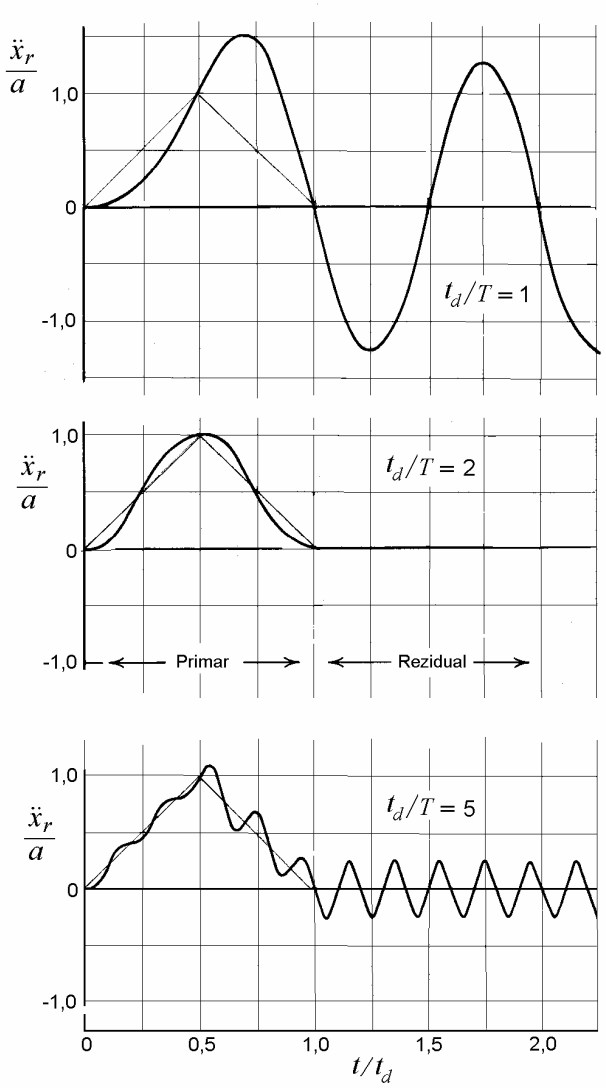


Fig. 2.68

Pentru un şoc de durată finită, se definesc două faze distincte: a) "şocul iniţial", care defineşte de fapt "răspunsul iniţial" pe durata aplicării şocului, care este o vibraţie forţată şi b) "şocul rezidual", care defineşte "răspunsul rezidual" după încetarea acţiunii şocului, care este o vibraţie liberă.

Se observă că pentru $t_d/T = 2$ nu apar vibraţii reziduale. Pentru $t_d/T = 1$, răspunsul primar maxim apare la $t_m/t_d = 0{,}605$.

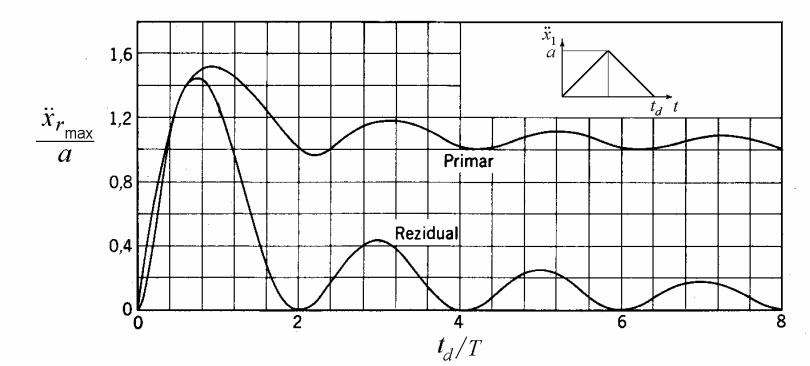


Fig. 2.69

În general interesează valoarea răspunsului maxim, în acest caz – acceleraţia relativă maximă a masei, pentru diferite valori ale raportului t_d/T. În fig. 2.69 se arată variaţia acceleraţiei maxime în funcţie de raportul adimensional t_d/T, separat pentru şocul primar şi pentru şocul rezidual.

2.6.2.2 Răspunsul la un impuls semisinusoidal

În fig. 2.70 se prezintă un impuls semisinusoidal exprimat analitic sub forma

$$\begin{aligned} &\ddot{u}(t) = a \sin\frac{\pi t}{t_d}, \quad \text{pentru} \quad 0 \le t \le t_d, \\ &\ddot{u}(t) = 0, \qquad\quad \text{pentru} \quad t_d \le t. \end{aligned} \tag{2.183}$$

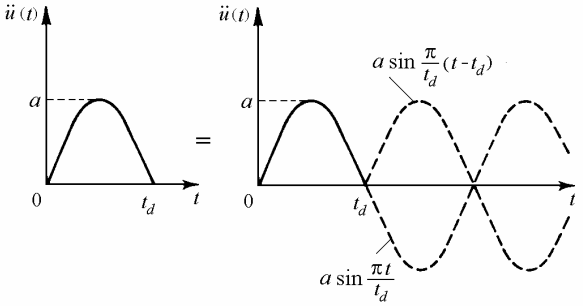


Fig. 2.70

Impulsul poate fi considerat rezultatul suprapunerii a două acceleraţii sinusoidale, una aplicată la $t = 0$, a doua aplicată la $t = t_d$.

Se obţin următoarele expresii pentru variaţia în timp a acceleraţiei relative a masei

$$\frac{\ddot{x}_r(t)}{a} = \frac{1}{1-\dfrac{T^2}{4t_d^2}}\left(\sin\frac{\pi t}{t_d} - \frac{T}{2t_d}\sin\omega_n t\right), \quad 0 \le t \le t_d\,, \qquad (2.184)$$

$$\frac{\ddot{x}_r(t)}{a} = \frac{\dfrac{T}{t_d}\cos\dfrac{\pi t_d}{T}}{1-\dfrac{T^2}{4t_d^2}}\sin\omega_n\left(t-\frac{t_d}{2}\right), \qquad t_d \le t\,. \qquad (2.185)$$

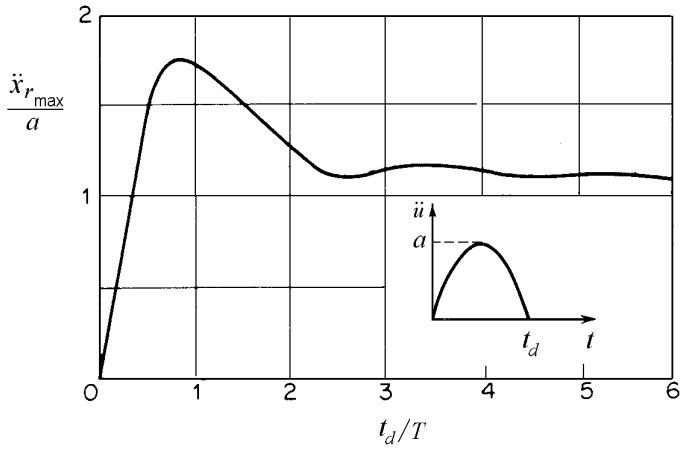


Fig. 2.71

În fig. 2.71 s-a reprezentat variaţia răspunsului primar maxim în funcţie de raportul t_d/T.

2.6.3 Spectrul răspunsului la şoc

Din punct de vedere practic, este preferabilă descrierea unui şoc sau a unei excitaţii tranzitorii prin efectul pe care îl are asupra unui sistem cu un grad de libertate, decât prin funcţia de timp a excitaţiei.

Valoarea maximă a răspunsului la şoc a fost reprezentată grafic în funcţie de raportul între durata şocului şi perioada proprie de vibraţie a sistemului cu un grad de libertate neamortizat, t_d/T. Acest raport se mai poate scrie

$t_d/T = \omega_n t_d/2\pi$, deci este proporțional cu produsul între durata șocului și pulsația proprie a sistemului cu un grad de libertate.

Curba răspunsului maxim în funcție de pulsația proprie a sistemului masă-arc se numește *spectrul șocului* sau *spectrul răspunsului*. A doua denumire include și *spectrul răspunsului tranzitoriu*, la o excitație de durată finită mai lungă decât perioada proprie a sistemului masă-arc. Diagramele din figurile 2.61,*a*, 2.63,*a*, 2.65,*a*, 2.69 și 2.71 sunt deci *spectre de șoc*. Ele descriu fie răspunsul maxim al unui sistem masă-arc dat, la șocuri de diferite durate, fie răspunsul sistemelor cu diferite pulsații proprii la un șoc cu o anumită durată.

Dacă se calculează valoarea maximă a răspunsului la șoc pentru sisteme masă-arc cu diferite pulsații proprii și se reprezintă grafic valorile răspunsului tranzitoriu maxim în funcție de pulsația proprie a oscilatorului, se obține spectrul șocului.

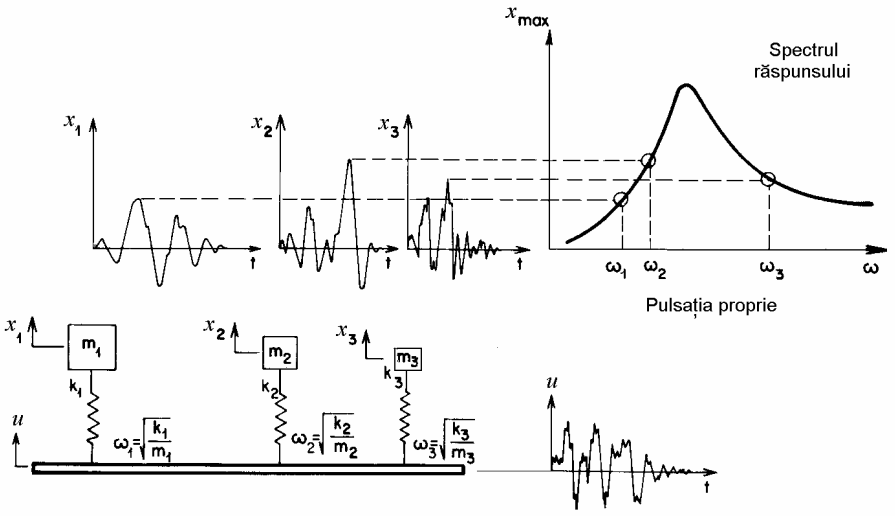


Fig. 2.72

Procedeul este reprezentat schematic în fig. 2.72. Pentru un număr infinit de oscilatori (sau același oscilator cu pulsație proprie variabilă continuu) se obține un spectru continuu al șocului considerat. Dacă oscilatorii sunt amortizați, în spectrul șocului se obține câte o curbă pentru fiecare valoare a raportului de amortizare.

Fiecare impuls are un spectru de șoc caracteristic, dar este posibil ca impulsuri cu funcții de timp diferite să aibă același spectru de șoc. Din acest motiv, funcția de timp a șocului nu poate fi reconstituită din spectrul său de răspuns.

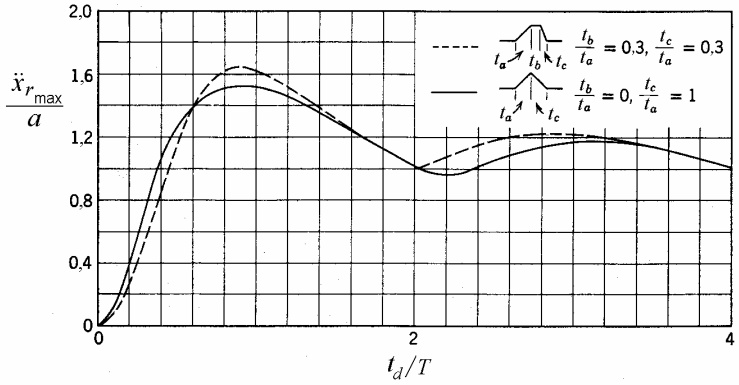


Fig. 2.73

Efectul unui şoc descris de o anumită funcţie de timp poate fi simulat cu o maşină pentru încercări la şoc care s-ar putea să nu poată reproduce exact funcţia de timp a şocului respectiv, dar poate produce un şoc echivalent, descris de o funcţie de timp diferită, care să aibă aproximativ acelaşi spectru de răspuns. De exemplu, dacă trebuie simulat un şoc triunghiular simetric, acesta poate fi aproximat cu un şoc trapezoidal cu raportul între timpul de menţinere şi timpul de creştere $t_b/t_a = 0{,}3$ şi raportul între timpul de descreştere şi timpul de creştere $t_c/t_a = 0{,}3$, aşa cum se arată în fig. 2.73.

Pentru spectre descrise de funcţii de timp mai complicate, integrala lui Duhamel şi spectrul răspunsului se calculează prin metode numerice. Spectrele răspunsului sunt utilizate în încercările la şoc şi în calificarea seismică a echipamentelor.

Probleme

2.E1 O masă necunoscută m este ataşată unui arc de rigiditate k necunoscută. Dacă o masă $m_1 = 0{,}5\ \text{kg}$ este adăugată masei m, frecvenţa proprie a sistemului scade de la $50\ \text{Hz}$ la $49\ \text{Hz}$. a) Să se determine valorile parametrilor m şi k. Dacă un arc de rigiditate k' se montează în paralel cu primul arc, frecvenţa proprie a sistemului creşte la $50\ \text{Hz}$. b) Să se determine k'.

Răspuns: $m = 12{,}126\,\text{kg}$, $k = 1{,}19 \cdot 10^6\ \text{N/m}$, $k' = 56\ \text{N/m}$.

2.E2 O masă $m = 0{,}5\ \text{kg}$ vibrează liber într-un mediu vâscos cu perioada $T = 0{,}15\ \text{sec}$ şi amplitudinea iniţială $a_0 = 10\ \text{mm}$. a) Să se determine rigiditatea k şi coeficientul de amortizare vâscoasă c dacă după 12 cicluri amplitudinea vibraţiilor

este $a_{12} = 0{,}2$ mm. b) Să se determine amplitudinea a'_{12} după 12 cicluri dacă se ataşează o masă $m_1 = 0{,}3$ kg masei iniţiale *m*.

Răspuns: $k = 877$ N/m, $c = 2{,}173$ Ns/m, $a'_{12} = 0{,}45$ mm.

2.E3 Un sistem masă-arc cu frecvenţa proprie $f = 5$ Hz vibrează într-un mediu vâscos cu un coeficient de amortizare $c = 0{,}002$ Ns/mm. Decrementul logaritmic este $\delta = 0{,}31$. a) Să se determine masa *m* şi rigiditatea arcului *k*. b) Care este noua valoare a decrementului logaritmic dacă se ataşează masei iniţiale o masă $m_1 = 1$ kg.

Răspuns: $m = 0{,}645$ kg, $k = 636{,}4$ N/m, $\delta' = 0{,}194$.

2.E4 Un sistem masă-arc-amortizor vâscos este deplasat o distanţă $a_0 = 20$ mm apoi lăsat liber. După 8 cicluri de vibraţie amplitudinea descreşte la $a'_8 = 4$ mm. O masă $m_1 = 2$ kg ataşată masei iniţiale produce o deplasare statică de 4 mm. Dacă noul sistem este deplasat o distanţă $a_0 = 20$ mm apoi lăsat liber, după 8 cicluri de vibraţie amplitudinea descreşte la $a''_8 = 5$ mm. Să se determine masa *m*, rigiditatea *k* şi coeficientul de amortizare *c*.

Răspuns: $m = 5{,}77$ kg, $k = 4905$ N/m, $c = 10{,}76$ Ns/m.

2.E5 Un sistem vibrator cu masa $m = 5$ kg şi rigiditatea arcului $k = 1$ N/mm este acţionat de o forţă armonică de amplitudine $F_0 = 10$ N şi frecvenţă 2 Hz. Să se determine: a) amplitudinea deplasării X; b) amplitudinea deplasării X' dacă o masă $m_1 = 2$ kg este adăugată masei *m*; c) pentru sistemul cu masa adiţională, cum trebuie modificat *k* astfel încât deplasarea să revină la valoarea *X*.

Răspuns: $X = 47{,}34$ mm, $X' = 95{,}85$ mm, se adaugă $k' = 315{,}5$ N/m în paralel, sau $k' = 8546.5$ N/m în serie cu *k*.

2.E6 O greutate $mg = 20$ N ataşată unui arc moale îl lungeşte 1 mm. a) Să se determine amplitudinea F_0 a forţei care, acţionând cu frecvenţa 20 Hz, produce vibraţii cu amplitudinea deplasării $X = 3{,}5$ mm. b) Să se determine o altă frecvenţă excitatoare la care forţa de amplitudine F_0 produce aceeaşi deplasare $X = 3{,}5$ mm.

Răspuns: $F_0 = 42{,}68$ N, $\omega' = 61{,}87$ rad/s.

2.E7 Un rotor cu masa $m = 2\,\text{kg}$ transmite o forță de $14\,\text{N}$ arcurilor pe care este rezemat când se roteşte cu viteza unghiulară de $30\,\text{rad/s}$ şi are o amplitudine a precesiei de $3{,}5\,\text{mm}$. a) Să se determine amplitudinea F_0 a forței de dezechilibru; b) Să se determine o altă valoare a vitezei unghiulare la care amplitudinea vibrațiilor are aceeaşi valoare.

Răspuns: $F_0 = 7{,}7\,\text{N}$, $\omega' = 55{,}67\,\text{rad/s}$.

2.E8 Un aparat sensibil cu masa $m = 1\,\text{kg}$ este folosit pe o platformă care vibrează datorită undelor transmise de la o sursă din apropiere. Platforma are o mişcare armonică cu amplitudinea $X_1 = 0{,}2\,\text{mm}$ şi frecvența $f = 15\,\text{Hz}$. Pentru a reduce vibrațiile transmise aparatului, între acesta şi platformă se introduc izolatori din cauciuc cu rigiditatea totală $k = 7000\,\text{N/m}$. Să se determine: a) amplitudinea X a deplasării aparatului; b) valoarea X' a amplitudinii vibrațiilor aparatului, dacă în paralel cu primii izolatori se mai adaugă un izolator cu rigiditatea $k' = 2000\,\text{N/m}$.

Răspuns: $X = 0{,}743\,\text{mm}$, $X' = 15{,}15\,\text{mm}$.

2.E9 O masă $m = 4\,\text{kg}$, suspendată cu două arcuri verticale între două suporturi fixe, este acționată de o forță armonică cu amplitudinea $F_0 = 10\,\text{N}$. Arcul superior are o rigiditate $k = 5000\,\text{N/m}$ iar arcul inferior are o rigiditate $2k$. Să se determine: a) frecvețele la care amplitudinea deplasării este $X = 20\,\text{mm}$, şi b) amplitudinea F_0' a forței transmise suportului inferior prin arcul $2k$.

Răspuns: $\omega_1 = 60{,}2\,\text{rad/sec}$, $\omega_2 = 62{,}25\,\text{rad/sec}$, $F_0' = 200\,\text{N}$.

2.E10 Un sistem vibrator neamortizat are o masă echivalentă m şi o rigiditate echivalentă k. O forță armonică de amplitudine $F_0 = 1\,\text{N}$ şi pulsație $\omega = 14\,\text{rad/s}$ produce vibrații staționare de amplitudine X. Dacă se adaugă o masă $m_1 = 2\,\text{kg}$ masei inițiale m, forța de amplitudine $F_0 = 1\,\text{N}$ trebuie să aibă o pulsație $\omega = 10\,\text{rad/s}$ sau $\omega = 12\,\text{rad/s}$ pentru a produce o deplasare cu aceeaşi amplitudine X. Să se determine valorile parametrilor m şi k.

Răspuns: Pentru $\omega < \omega_1$, $m = 2{,}083\,\text{kg}$, $k = 498{,}1\,\text{N/m}$; pentru $\omega > \omega_1$, $m = 5{,}538\,\text{kg}$, $k = 919{,}6\,\text{N/m}$.

2.E11 Un motor electric cu greutatea $mg = 12000\,\text{N}$ este montat la mijlocul unei bare de lungime $\ell = 2\,\text{m}$ simplu rezemată la capete, cu moment de inerție axial al secțiunii transversale $I = 20\,\text{mm}^4$ şi modulul de elasticitate longitudinal $E = 2{,}1 \cdot 10^5\,\text{N/mm}^2$. Dacă motorul are o greutate dezechilibrată în

rotație $m_0 g = 2000$ N cu excentricitatea $e = 0{,}1$ mm şi turația $n = 1500$ rot/min, să se determine: a) amplitudinea X a vibrațiilor forțate ale maşinii, şi b) amplitudinea forței dinamice transmise unui reazem.

Răspuns: $X = 50{,}22$ μm, $F_{din} = 632{,}77$ N.

2.E12 Un motor cu masa $m = 10$ kg, rezemat pe arcuri cu rigiditatea totală $k = 2000$ N/m, produce o forță dezechilibrată de amplitudine $F_0 = 20$ N la frecvența de 2 Hz. Să se determine rigiditatea k' a unui arc şi modul de legare a acestuia (în serie sau în paralel) pentru a reduce la jumătate amplitudinea forței transmise F_{T0}. Să se determine valoarea altei pulsații la care forța dezechilibrată are acelaşi efect.

Răspuns: $k' = 731{,}6$ N/m în paralel, $\omega' = 10{,}75$ rad/s.

2.E13 Un sistem vibrator compus din o masă $m = 0{,}2$ kg şi un arc de rigiditate $k = 0{,}2$ N/mm este acționat de o forță armonică de amplitudine $F_0 = 5$ N şi pulsație $\omega = 35$ rad/s. Să se determine: a) amplitudinea F_{T0} a forței transmise suportului de la bază, şi b) amplitudinea X a deplasării masei *m*.

Răspuns: $F_{T0} = 22{,}22$ N, $X = 0{,}11$ m.

2.E14 Un sistem masă-arc cu amortizare vâscoasă este acționat de o forță armonică de amplitudine $F_0 = 10$ N. Variind pulsația forței excitatoare, se obține o amplitudine maximă $X_1 = 60$ mm la pulsația de rezonanță $\omega_1 = 14$ rad/s. Dacă se ataşează sistemului o masă $m_1 = 2$ kg, amplitudinea maximă devine $X_2 = 80$ mm. Să se determine masa *m*, rigiditatea *k* şi coeficientul de amortizare *c*.

Răspuns: $m = 2{,}57$ kg, $k = 503{,}72$ N/m, $c = 11{,}9$ Ns/m.

2.E15 O masă $m = 5$ kg este ataşată de un arc cu rigiditatea $k = 1$ N/mm şi este acționată de o forță armonică de amplitudine $F_0 = 10$ N şi frecvență $f = 2$ Hz. Să se determine: a) amplitudinea X_1 a vibrațiilor forțate ale masei *m;* b) amplitudinea X_2 a vibrațiilor forțate când o masă $m_1 = 2$ kg este adăugată masei *m*; c) coeficientul de amortizare vâscoasă *c* al unui amortizor legat în paralel cu arcul şi care reduce amplitudinea vibrațiilor la valoarea inițială.

Răspuns: $X_1 = 47{,}3$ mm, $X_2 = 92{,}5$ mm, $c = 10{,}3$ Ns/m.

2.E16 Utilizând metoda lui Rayleigh, să se calculeze pulsația proprie fundamentală a barelor din fig. 2.74, folosind deformata aproximativă dată alăturat.

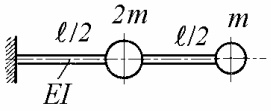
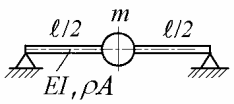
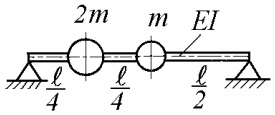
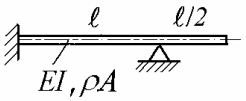
a		$v(x)=v_0\left(1-\cos\dfrac{\pi x}{2\ell}\right).$
b		$v(x)=v_0\left[3\dfrac{x}{\ell}-4\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3\right],$ $0\le x\le \ell/2$
c		$v(x)=v_0\sin\dfrac{\pi x}{\ell}.$
d		$v(x)=v_0\left(1-\cos\dfrac{2\pi x}{\ell}\right).$

Fig. 2.74

Răspuns: a) $\omega_1=1{,}612\sqrt{\dfrac{EI}{m\ell^3}}$; b) $\omega_1=6{,}928\sqrt{\dfrac{EI}{m\ell^3\left(1+0{,}4857\,\rho A\ell/m\right)}}$;

c) $\omega_1=4{,}935\sqrt{\dfrac{EI}{m\ell^3}}$; d) $\omega_1=\dfrac{22{,}79}{\ell^2}\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A}}$.

2.E17 Utilizând metoda lui Rayleigh, să se calculeze pulsaţia proprie fundamentală a vibraţiilor axiale ale barei din fig. 2.75 folosind o funcţie cu variaţie liniară deplasărilor longitudinale. Se consideră $m=2\rho A\ell$.

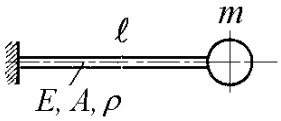


Fig. 2.75

Răspuns: $\omega_1=\dfrac{0{,}655}{\ell}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$.

3.
SISTEME CU DOUĂ GRADE DE LIBERTATE

Numărul gradelor de libertate ale unui sistem în vibrație este egal cu numărul coordonatelor independente necesare pentru a descrie complet mişcarea sistemului.

În acest capitol se studiază sistemele cu două grade de libertate, fiind cel mai simplu caz de sistem discret, şi o introducere în studiul sistemelor cu un număr finit de grade de libertate. În acest scop se introduce notația matricială, care de fapt nu este necesară studiului sistemelor cu numai două grade de libertate.

În capitolul 2 se arată că vibrația liberă a unui sistem neamortizat cu un grad de libertate este o mişcare armonică la *frecvența proprie* a sistemului, numită *vibrație proprie* (naturală). În schimb, vibrația liberă a unui sistem neamortizat cu mai multe grade libertate este o *mişcare periodică*, şi constă din suma mai multor vibrații proprii simultane, fiecare implicând o anumită frecvență proprie şi formă deformată, numite *moduri proprii* (naturale) de vibrație. Mişcarea într-un mod propriu de vibrație este sincronă şi armonică în toate coordonatele sistemului.

Răspunsul dinamic al unui sistem discret poate fi descris de un sistem de ecuații diferențiale ordinare simultane. Printr-o alegere judicioasă a coordonatelor, numite *coordonate modale* sau *principale*, ecuațiile pot fi decuplate şi rezolvate independent una de alta. Coordonatele modale reprezintă combinații liniare ale deplasărilor reale. Invers, mişcarea sistemului poate fi privită ca o suprapunere de vibrații în modurile proprii definite de coordonatele modale.

Un sistem cu două grade de libertate are două frecvențe proprii şi, în vibrații forțate, pentru amortizări reduse, poate avea două rezonanțe. Răspunsul liber la o excitație inițială şi răspunsul forțat la o excitație externă pot fi exprimate în funcție de cele două moduri proprii de vibrație ale căror forme deformate sunt definite de vectori ortogonali, ponderați de matricile de masă sau de rigiditate. Răspunsul forțat la excitație armonică se poate obține uşor utilizând regula lui Cramer. Rezonanța apare atunci când frecvența excitatoare devine egală cu una dintre frecvențele proprii ale sistemului. Antirezonanța poate apare la o frecvență egală cu frecvența proprie a unui subsistem masă-arc.

În acest capitol se discută în primul rând calculul frecvenţelor proprii şi al formei modurilor proprii de vibraţie. Vibraţiile forţate sunt analizate întâi pentru sisteme neamortizate, folosind analiza modală şi analiza spectrală directă, apoi pentru sisteme amortizate.

3.1 Vibraţii de translaţie

În continuare se studiază sisteme masă-arc cu două grade de libertate, în care masele au mişcare de translaţie unidirecţională.

3.1.1 Ecuaţiile de mişcare

Se consideră sistemul din fig. 3.1, *a* compus din masele m_1 şi m_2, ataşate de puncte fixe prin arcurile k_1 şi k_3, şi cuplate între ele prin arcul k_2.

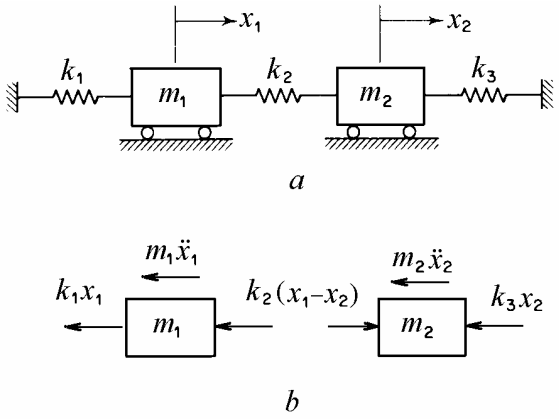


Fig. 3.1

Dacă masele sunt ghidate să se mişte pe o singură direcţie orizontală, configuraţia sistemului la un moment dat este complet determinată de deplasările instantanee x_1 şi x_2 faţă de poziţiile de echilibru static. Sistemul are două grade de libertate.

Cu ajutorul diagramelor forţelor din fig. 3.1, *b* şi folosind principiul lui d'Alembert (echilibrul dinamic al forţelor de inerţie şi al celor efectiv aplicate), ecuaţiile de mişcare se pot scrie

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 \left(x_1 - x_2 \right) = 0 ,$$
$$m_2 \ddot{x}_2 + k_3 x_2 - k_2 \left(x_1 - x_2 \right) = 0 ,$$

sau sub forma

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + \left(k_1 + k_2\right) x_1 - k_2 x_2 = 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + \left(k_3 + k_2\right) x_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Acesta este un sistem de două ecuații diferențiale liniare "cuplate", cu coeficienți constanți. Cuplajul între cele două coordonate este produs de arcul k_2. Dacă $k_2 = 0$, ecuațiile (3.1) devin independente, iar sistemul din fig. 3.1 degenerează în două sisteme vibratoare cu câte un grad de libertate.

Ecuațiile (3.1) se pot scrie matricial

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{3.2}$$

sau în formă compactă

$$\left[m\right]\left\{\ddot{x}\right\} + \left[k\right]\left\{x\right\} = \left\{0\right\}, \tag{3.3}$$

unde $\left[m\right]$ este *matricea de masă*, $\left[k\right]$ este *matricea de rigiditate* iar $\left\{x\right\}$ este *vectorul* coloană al *deplasărilor*. De notat că matricile pătrate sunt notate cu paranteze drepte iar vectorii coloană sunt notați cu acolade. Matricea de masă şi matricea de rigiditate sunt simetrice, deci egale cu transpusele lor

$$\left[m\right] = \left[m\right]^{\mathrm{T}}, \quad \left[k\right] = \left[k\right]^{\mathrm{T}}. \tag{3.4}$$

Matricea maselor este diagonală. Cuplajul este produs de elementele nediagonale are matricii de rigiditate.

3.1.2 Vibrații libere. Moduri proprii de vibrație

Interesează în ce condiții cele două mase au mişcări armonice sincrone, când sistemul se comportă ca un sistem cu un grad de libertate în vibrații proprii.

Se aleg soluții de forma

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_1 \cos\left(\omega t - \varphi\right), \\ x_2(t) &= a_2 \cos\left(\omega t - \varphi\right), \end{aligned} \tag{3.5}$$

şi se studiază în ce condiții o astfel de mişcare este posibilă. În această mişcare, raportul între deplasările instantanee ale maselor este constant în timp

$$x_1(t) / x_2(t) = a_1 / a_2 = const. \tag{3.6}$$

Configurația sistemului nu se modifică în timp, forma deformată rămâne asemenea cu ea însăşi în orice moment.

Înlocuind soluţiile (3.5) în ecuaţiile diferenţiale (3.1), rezultă sistemul algebric omogen

$$\begin{aligned} &\left(k_1 + k_2 - m_1\,\omega^2\right) a_1 - k_2\, a_2 = 0, \\ &-k_2\, a_1 + \left(k_3 + k_2 - m_2\,\omega^2\right) a_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Ecuaţiile omogene simultane (3.7) au soluţii nebanale (diferite de zero) dacă determinantul coeficienţilor a_1 şi a_2 este zero

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\,\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3 + k_2 - m_2\,\omega^2 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{3.8}$$

Dezvoltând determinantul se obţine

$$\omega^4 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_3 + k_2}{m_2}\right)\omega^2 + \frac{k_1 k_3 + \left(k_1 + k_3\right)k_2}{m_1\, m_2} = 0 \tag{3.9}$$

care este o ecuaţie de gradul doi în ω^2 numită *ecuaţia caracteristică* sau *ecuaţia pulsaţiilor proprii*. Rădăcinile ω_1^2 şi ω_2^2 sunt reale şi pozitive. Mărimile ω_1 şi ω_2 se numesc *pulsaţii proprii* sau *pulsaţii naturale,* deoarece depind doar de masele şi rigidităţile sistemului.

Deoarece sistemul ecuaţiilor (3.7) este omogen, nu pot fi determinate amplitudinile a_1 şi a_2, ci numai raportul acestora $\mu = a_2 / a_1$.

La pulsaţia ω_1, raportul amplitudinilor este

$$\mu_1 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)_1 = \frac{k_3 + k_2 - m_2\,\omega_1^2}{k_2} \tag{3.10}$$

iar la pulsaţia ω_2, raportul amplitudinilor este

$$\mu_2 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)_2 = \frac{k_3 + k_2 - m_2\,\omega_2^2}{k_2}\,. \tag{3.11}$$

Rapoartele (3.10) şi (3.11) determină forma deformată a sistemului în mişcările sincrone cu pulsaţiile ω_1, respectiv ω_2. Dacă se dă o valoare arbitrară unui element din fiecare raport (de exemplu, numitorului), valoarea celuilalt element rezultă din expresiile de mai sus. Acest proces se numeşte *normalizare*.

Pulsaţiile proprii şi rapoartele amplitudinilor corespunzătoare determină condiţiile în care pot avea loc mişcări armonice sincrone ale celor două mase, adică *moduri proprii de vibraţie*. Un mod propriu de vibraţie este definit de doi parametri: pulsaţia proprie şi forma modală. Formele modale pot fi reprezentate prin vectorii coloană

$$\{a\}_1 = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}_1 = (a_1)_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ u_1 \end{Bmatrix} = C_1 \{u\}_1,$$
$$\{a\}_2 = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}_2 = (a_1)_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = C_2 \{u\}_2, \tag{3.12}$$

numiți şi *vectori modali*.

În relațiile (3.12) vectorii modali sunt normalizați cu primul element egal cu 1. Se spune că vectorii normalizați reprezintă forma *modurilor normale* de vibrație.

Cele două mişcări sincrone posibile sunt date de

$$\{x(t)\}_1 = C_1 \{u\}_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1),$$
$$\{x(t)\}_2 = C_2 \{u\}_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2), \tag{3.13}$$

iar soluția generală a vibrațiilor libere este

$$\{x(t)\} = \{x(t)\}_1 + \{x(t)\}_2 = C_1 \{u\}_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + C_2 \{u\}_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2). \tag{3.14}$$

În expresia (3.14), cele patru constante de integrare C_1, C_2, φ_1, φ_2 se determină utilizând cele patru condiții inițiale, desplasările şi vitezele la $t = 0$.

Pentru condiții inițiale arbitrare, vibrația liberă a unui sistem cu două grade de libertate este o mişcare *periodică* obținută din suprapunerea a două moduri proprii de vibrație, adică a două mişcări *armonice* cu pulsații egale cu pulsațiile proprii ale sistemului. Se poate arăta că pentru viteze inițiale nule şi deplasări inițiale proporționale cu cele dintr-un mod propriu de vibrație, mişcarea liberă este sincronă şi pur armonică, la pulsația proprie a modului respectiv. *Un sistem poate vibra liber într-un mod propriu de vibrație dacă forma deformată inițială este asemenea cu forma modului respectiv.*

Exemplul 3.1

Se cer modurile proprii de vibrație ale sistemului din fig. 3.2.

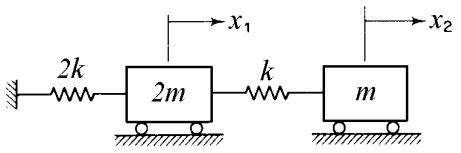


Fig. 3.2

Rezolvare. Ecuațiile de mişcare se pot scrie

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Presupunând soluţii de forma

$$\{x\} = \{u\} \cos(\omega t - \varphi)$$

se obţine sistemul algebric omogen

$$\begin{aligned} (3k - 2\omega^2 m) u_1 - k u_2 &= 0, \\ -k u_1 + (k - \omega^2 m) u_2 &= 0, \end{aligned}$$

sau, împărţind prin k,

$$\begin{aligned} (3 - 2\alpha) u_1 - u_2 &= 0, \\ -u_1 + (1 - \alpha) u_2 &= 0, \end{aligned}$$

unde s-a notat

$$\alpha = m\omega^2 / k .$$

Condiţia de a avea soluţii nebanale este

$$\begin{vmatrix} 3 - 2\alpha & -1 \\ -1 & 1 - \alpha \end{vmatrix} = 0, \qquad 2\alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0,$$

cu rădăcinile

$$\alpha_1 = 1/2, \qquad \alpha_2 = 2 .$$

Pulsaţiile proprii sunt

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

Alegând primul element egal cu 1, primul vector modal este dat de

$$\begin{bmatrix} 3 - 2\alpha_1 & -1 \\ -1 & 1 - \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0,$$

iar al doilea vector modal este calculat din

$$\begin{bmatrix} 3 - 2\alpha_2 & -1 \\ -1 & 1 - \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = 0 .$$

Forma modurilor proprii de vibraţie este prezentată în fig. 3.3. În primul mod de vibraţie, cele două mase se deplasează în aceeaşi direcţie, amândouă spre

dreapta sau amândouă spre stânga, deplasarea masei m fiind dublă față de deplasarea masei $2m$. În modul al doilea, cele două mase se deplasează egal în direcții opuse. Mijlocul arcului k nu se deplasează, deci este un *punct nodal* (nod de vibrație). Dacă acest punct ar fi fixat, mişcarea în modul respectiv nu s-ar modifica. Arcul dintre mase ar fi împărțit în două arcuri de rigiditate $2k$ fiecare. Masa $2m$ este astfel legată de puncte fixe prin două arcuri de rigidități $2k$ (în paralel) cu o rigiditate echivalentă $4k$, în timp ce masa m este legată de un punct fix prin un arc de rigiditate $2k$, ambele subsisteme având aceeaşi pulsație proprie egală cu ω_2.

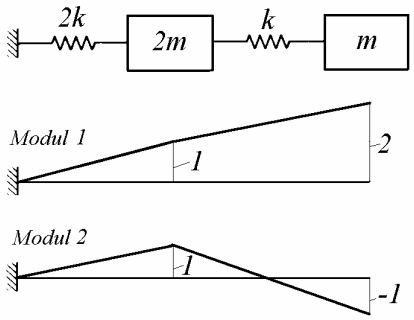


Fig. 3.3

Rezumând, primul mod propriu de vibrație are pulsația proprie $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}$ şi o formă modală $\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$, iar al doilea mod propriu are pulsația proprie $\omega_2 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$ şi o formă modală $\{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$. Dacă masele sistemului sunt deplasate inițial cu $x_1 = 1$ şi $x_2 = 2$ apoi lăsate liber, mişcarea sistemului va fi armonică cu pulsația $\omega_1 = 0{,}707\sqrt{k/m}$. Dacă deplasările inițiale ar fi $x_1 = 1$ şi $x_2 = -1$, mişcarea va fi armonică cu pulsația $\omega_2 = 1{,}414\sqrt{k/m}$.

3.1.3 Ortogonalitatea modurilor proprii

Înlocuind soluțiile (3.13) în ecuația (3.3), se obține

$$[k]\{u\}_1 = \omega_1^2 [m]\{u\}_1, \qquad (3.15, a)$$

$$[k]\{u\}_2 = \omega_2^2 [m]\{u\}_2. \qquad (3.15, b)$$

Înmulţind în (3.15, *a*) la stânga cu $\{u\}_2^{\mathrm{T}}$ rezultă

$$\{u\}_2^{\mathrm{T}}[k]\{u\}_1 = \omega_1^2 \{u\}_2^{\mathrm{T}}[m]\{u\}_1. \tag{3.16}$$

Dacă se transpune (3.15, *b*) şi se înmulţeşte la dreapta cu $\{u\}_1$ rezultă

$$\{u\}_2^{\mathrm{T}}[k]\{u\}_1 = \omega_2^2 \{u\}_2^{\mathrm{T}}[m]\{u\}_1. \tag{3.17}$$

Scăzând (3.16) din (3.17), pentru $\omega_1 \neq \omega_2$, se obţine

$$\{u\}_2^{\mathrm{T}}[m]\{u\}_1 = 0, \tag{3.18}$$

şi calculând transpusa

$$\{u\}_1^{\mathrm{T}}[m]\{u\}_2 = 0. \tag{3.19}$$

Înlocuind (3.18) în (3.16) se obţine

$$\{u\}_2^{\mathrm{T}}[k]\{u\}_1 = 0 \tag{3.20}$$

şi calculând transpusa

$$\{u\}_1^{\mathrm{T}}[k]\{u\}_2 = 0. \tag{3.21}$$

Relaţiile (3.18)-(3.21) arată că vectorii modali sunt ortogonali în raport cu matricele de masă şi de rigiditate. De notat diferenţa faţă de ortogonalitatea obişnuită a doi vectori $\{a\}$ şi $\{b\}$, care se scrie sub forma $\{a\}^{\mathrm{T}}\{b\} = 0$. Se spune că vectorii modali sunt *ortonormali* (ortogonali şi normalizaţi).

3.1.4 Coordonate modale

Dacă în expresiile (3.13) se notează

$$\begin{aligned} q_1(t) &= C_1 \cos\left(\omega_1 t - \varphi_1\right), \\ q_2(t) &= C_2 \cos\left(\omega_2 t - \varphi_2\right), \end{aligned} \tag{3.22}$$

soluţia (3.14) devine

$$\{x(t)\} = \{u\}_1 q_1 + \{u\}_2 q_2. \tag{3.23}$$

Relaţia (3.23) se poate scrie sub forma

$$\{x(t)\} = \left[\{u\}_1 \ \{u\}_2\right]\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = [u]\{q\} \tag{3.23, a}$$

unde

$$[u]=\left[\{u\}_1\ \{u\}_2\right] \tag{3.24}$$

se numeşte *matricea modală*. Coloanele matricii modale sunt vectorii modali.

Înlocuind (3.23) în (3.3), înmulțind la stânga cu $\{u\}_r^{\mathrm{T}}\ (r=1,2)$ şi ținând cont de relațiile de ortogonalitate, se obține

$$M_r\,\ddot{q}_r + K_r\,q_r = 0\,, \tag{3.25}$$

unde

$$M_r=\{u\}_r^{\mathrm{T}}[m]\,\{u\}_r\,,\quad K_r=\{u\}_r^{\mathrm{T}}[k]\,\{u\}_r \tag{3.26}$$

sunt *masa modală,* respectiv *rigiditatea modală* a modului *r*.

Valorile maselor şi rigidităților modale depind de normalizarea vectorilor modali. Când normalizarea se face impunând valori egale cu 1 maselor modale, rigiditățile modale sunt egale cu pătratele pulsațiilor proprii respective.

Din relațiile (3.15) se obține pulsația proprie în funcție de vectorul modal

$$\omega_r^2=\frac{\{u\}_r^{\mathrm{T}}[k]\,\{u\}_r}{\{u\}_r^{\mathrm{T}}[m]\,\{u\}_r}\ . \qquad r=1,2 \tag{3.27}$$

Câtul lui Rayleigh este definit prin raportul

$$R(\{u\})=\frac{\{u\}^{\mathrm{T}}[k]\,\{u\}}{\{u\}^{\mathrm{T}}[m]\,\{u\}}\ . \tag{3.28}$$

Dacă vectorul $\{u\}$ coincide cu unul din vectorii modali ai sistemului, atunci câtul se reduce la pătratul pulsației proprii respective. Câtul lui Rayleigh are o valoare staționară în vecinătatea unui vector modal. Astfel, dacă $\{u\}$ este un vector ales arbitrar, care diferă puțin de primul vector modal, atunci $R(\{u\})$ are o valoare foarte apropiată de pătratul primei pulsații proprii şi totdeauna mai mare.

Transformarea liniară de coordonate (3.23) decuplează ecuațiile de mişcare. Coordonatele (3.22), în care ecuațiile de mişcare sunt independente, se numesc *coordonate principale* sau *coordonate modale*.

Înlocuind (3.23, *a*) în (3.3) şi înmulțind la stânga cu $[u]^{\mathrm{T}}$ se obține

$$[u]^{\mathrm{T}}[m]\,[u]\,\{\ddot{q}\}+[u]^{\mathrm{T}}[k]\,[u]\{q\}=\{0\}, \tag{3.29}$$

sau

$$[M]\,\{\ddot{q}\}+[K]\,\{q\}=\{0\}, \tag{3.29, a}$$

unde matricile diagonale

$$[M]=[u]^{\mathrm{T}}[m][u] \quad \text{şi} \quad [K]=[u]^{\mathrm{T}}[k][u] \tag{3.30}$$

sunt *matricea de masă modală,* respectiv *matricea de rigiditate modală*.

Transformarea de coordonate (3.23, *a*) diagonalizează simultan matricile de masă şi de rigiditate. După rezolvarea separată a ecuaţiilor decuplate (3.29, *a*), coordonatele modale pot fi înlocuite în (3.23, *a*) pentru a obţine coordonatele fizice din spaţiul configuraţiilor. Această metodă se numeşte *analiză modală.* Analiza modală foloseşte o transformare de coordonate liniară bazată pe matricea modală pentru a decupla ecuaţiile de mişcare ale unui sistem în vibraţie.

3.1.5 Răspunsul la excitaţie armonică

Se consideră vibraţiile forţate ale sistemului din fig. 3.4, sub acţiunea forţelor $f_1(t)$ şi $f_2(t)$ aplicate masei m_1, respectiv m_2.

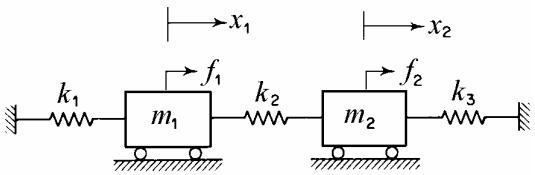


Fig. 3.4

Ecuaţiile de mişcare sunt

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2&=f_1,\\ m_2\ddot{x}_2-k_2x_1+(k_3+k_2)x_2&=f_2, \end{aligned} \tag{3.31}$$

sau, în formă matricială compactă,

$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}, \tag{3.31, a}$$

unde $\{f\}$ este *vectorul* coloană al *forţelor exterioare*.

3.1.5.1 Rezolvarea prin analiză modală

Înlocuind (3.23, *a*) în ecuaţia (3.31, *a*), şi înmulţind la stânga cu $[u]^{\mathrm{T}}$ se obţine

$$[M]\{\ddot{q}\}+[K]\{q\}=\{F\}, \tag{3.32}$$

unde

$$\{F\}=[u]^{\mathrm{T}}\{f\} \tag{3.33}$$

este *vectorul* coloană al *forţelor modale*.

În cazul excitației armonice

$$\{f\}=\{\hat{f}\}\cos\omega t\,, \tag{3.34}$$

răspunsul staționar este

$$\{x\}=\{\hat{x}\}\cos\omega t\,,\qquad \{q\}=\{\hat{q}\}\cos\omega t\,, \tag{3.35}$$

unde o "căciulă" deasupra literei denotă amplitudinea.

Înlocuind (3.34) şi (3.35) în (3.32) rezultă

$$\left[-\omega^2[M]+[K]\right]\{\hat{q}\}=[u]^{\mathrm{T}}\{\hat{f}\}=\{\hat{F}\}, \tag{3.36}$$

astfel că amplitudinile coordonatelor modale au expresiile

$$\hat{q}_1=\frac{\hat{F}_1}{K_1-\omega^2M_1}=\frac{\{u\}_1^{\mathrm{T}}\{\hat{f}\}}{\{u\}_1^{\mathrm{T}}[k]\{u\}_1-\omega^2\{u\}_1^{\mathrm{T}}[m]\{u\}_1}\,, \tag{3.37}$$

$$\hat{q}_2=\frac{\hat{F}_2}{K_2-\omega^2M_2}=\frac{\{u\}_2^{\mathrm{T}}\{\hat{f}\}}{\{u\}_2^{\mathrm{T}}[k]\{u\}_2-\omega^2\{u\}_2^{\mathrm{T}}[m]\{u\}_2}\,. \tag{3.38}$$

Ecuația (3.23) scrisă pentru amplitudini devine

$$\{\hat{x}\}=\{u\}_1\,\hat{q}_1+\{u\}_2\,\hat{q}_2\,. \tag{3.39}$$

Înlocuind (3.37) şi (3.38) în (3.39) se obține vectorul amplitudinilor în coordonate fizice

$$\{\hat{x}\}=\frac{\{u\}_1^{\mathrm{T}}\{\hat{f}\}\{u\}_1}{\{u\}_1^{\mathrm{T}}[k]\{u\}_1-\omega^2\{u\}_1^{\mathrm{T}}[m]\{u\}_1}+\frac{\{u\}_2^{\mathrm{T}}\{\hat{f}\}\{u\}_2}{\{u\}_2^{\mathrm{T}}[k]\{u\}_2-\omega^2\{u\}_2^{\mathrm{T}}[m]\{u\}_2}\,. \tag{3.40}$$

Elementele vectorului $\{\hat{x}\}$ au forma

$$\hat{x}_1=\frac{\{u\}_1^{\mathrm{T}}\{\hat{f}\}}{K_1-\omega^2M_1}u_{11}+\frac{\{u\}_2^{\mathrm{T}}\{\hat{f}\}}{K_2-\omega^2M_2}u_{12}\,, \tag{3.41}$$

$$\hat{x}_2=\frac{\{u\}_1^{\mathrm{T}}\{\hat{f}\}}{K_1-\omega^2M_1}u_{21}+\frac{\{u\}_2^{\mathrm{T}}\{\hat{f}\}}{K_2-\omega^2M_2}u_{22}\,. \tag{3.42}$$

Exemplul 3.2

Se consideră sistemul din fig. 3.2 acționat de forțele armonice $f_1 = \hat{f}_1 \cos\omega t$ şi $f_2 = \hat{f}_2 \cos\omega t$. Să se calculeze amplitudinile răspunsului staționar şi să se traseze curbele receptanțelor pentru $f_2 = 0$.

Rezolvare. Ecuațiile de mişcare se pot scrie

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}.$$

Folosind transformarea de coordonate

$$\{x\} = [u]\{q\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} q_1 + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

şi înmulțind la stânga cu transpusa matricii modale, se obține

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

sau

$$\begin{bmatrix} 6m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & 0 \\ 0 & 6k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 + 2f_2 \\ f_1 - f_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}.$$

În cazul excitației armonice $\{f\} = \{\hat{f}\} \cos\omega t$, răspunsul staționar este $\{q\} = \{\hat{q}\} \cos\omega t$. Amplitudinile coordonatelor modale sunt

$$\hat{q}_1 = \frac{\hat{F}_1}{3k - \omega^2 6m} = \frac{\hat{f}_1 + 2\hat{f}_2}{3k\left(1 - \omega^2/\omega_1^2\right)}, \quad \hat{q}_2 = \frac{\hat{F}_2}{6k - \omega^2 3m} = \frac{\hat{f}_1 - \hat{f}_2}{6k\left(1 - \omega^2/\omega_2^2\right)}.$$

Amplitudinile în spațiul configurațiilor sunt elementele vectorului

$$\{\hat{x}\} = \frac{\lfloor 1 \quad 2 \rfloor \{\hat{f}\} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}}{3k\left(1 - \omega^2/\omega_1^2\right)} + \frac{\lfloor 1 \quad -1 \rfloor \{\hat{f}\} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}}{6k\left(1 - \omega^2/\omega_2^2\right)}.$$

Când $f_2 = 0$ şi $f_1 = f$, vectorul amplitudinilor se poate scrie

$$\{\hat{x}\} = \frac{\lfloor 1 \quad 2 \rfloor \begin{Bmatrix} \hat{f} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}}{3k\left(1 - \omega^2/\omega_1^2\right)} + \frac{\lfloor 1 \quad -1 \rfloor \begin{Bmatrix} \hat{f} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}}{6k\left(1 - \omega^2/\omega_2^2\right)}$$

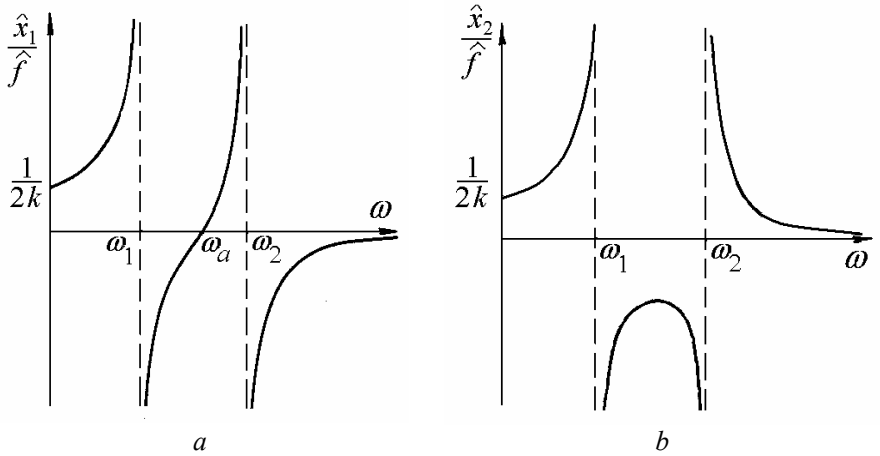
iar receptanțele sunt

$$\alpha_{11}=\frac{\hat{x}_1}{\hat{f}}=\frac{1}{3k\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)}+\frac{1}{6k\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)},\quad \alpha_{21}=\frac{\hat{x}_2}{\hat{f}}=\frac{2}{3k\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)}+\frac{-1}{6k\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)},$$

sau

$$\frac{\hat{x}_1}{\hat{f}}=\frac{1}{6m\left(\omega_1^2-\omega^2\right)}+\frac{1}{3m\left(\omega_2^2-\omega^2\right)},\quad \frac{\hat{x}_2}{\hat{f}}=\frac{1}{3m\left(\omega_1^2-\omega^2\right)}-\frac{1}{3m\left(\omega_2^2-\omega^2\right)}.$$

Curbele de răspuns în frecvență sunt redate în fig. 3.5.



a *b*

Fig. 3.5

Rezonanțele apar la $\omega_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}$ şi $\omega_2=\sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$, când pulsația excitatoare devine egală cu una din pulsațiile proprii ale sistemului. Când $\omega=\omega_a=\sqrt{\frac{k}{m}}$, prima masă este fixă în spațiu, $\hat{x}_1=0$, în timp ce masa a doua vibrează, $\hat{x}_2\neq 0$, condiție definită ca *antirezonanță*. Pulsația de antirezonanță este egală cu pulsația proprie a subsistemului format din arcul *k* şi masa *m*. Acest subsistem este numit *absorbitor dinamic de vibrații*. Energia introdusă într-un ciclu de vibrație de forța aplicată este absorbită de această parte a sistemului, menținând masa $2m$ fixă în spațiu, condiție urmărită în multe aplicații practice.

3.1.5.2 Rezolvarea prin analiză spectrală

Înlocuind (3.34) şi (3.35) în ecuația (3.31, *a*), rezultă

$$\left(\left[k\right]-\omega^2\left[m\right]\right)\left\{\hat{x}\right\}=\left\{\hat{f}\right\}, \tag{3.43}$$

sau

$$\left\{\hat{x}\right\}=\left(\left[k\right]-\omega^2\left[m\right]\right)^{-1}\left\{\hat{f}\right\}. \tag{3.44}$$

Ecuația (3.43) reprezintă un sistem liniar de ecuații algebrice care poate fi rezolvat folosind regula lui Cramer. Inversarea din ecuația (3.44) nu se face practic niciodată, preferându-se rezolvarea sistemului (3.43).

Exemplul 3.3

Se consideră sistemul din fig. 3.2 acționat de o forță armonică $f_1=\hat{f}_1\cos\omega t$. Se cere să se calculeze amplitudinile răspunsului staționar prin analiză spectrală directă.

Rezolvare. Ecuațiile de mişcare (3.31) se scriu

$$\begin{aligned} 2m\ddot{x}_1+3kx_1-kx_2&=\hat{f}_1\cos\omega t,\\ m\ddot{x}_2-kx_1+kx_2&=0. \end{aligned}$$

Înlocuind soluția (3.35) în ecuațiile de mai sus, rezultă un sistem de două ecuații algebrice liniare

$$\begin{aligned} \left(3k-\omega^2 2m\right)\hat{x}_1-k\hat{x}_2&=\hat{f}_1,\\ -k\hat{x}_1+\left(k-\omega^2 m\right)\hat{x}_2&=0. \end{aligned}$$

Folosind regula lui Cramer, se obțin amplitudinile $\hat{x}_1$ şi $\hat{x}_2$ sub forma

$$\hat{x}_1=\frac{\begin{vmatrix}1 & -k\\ 0 & k-\omega^2 m\end{vmatrix}\hat{f}}{\begin{vmatrix}3k-\omega^2 2m & -k\\ -k & k-\omega^2 m\end{vmatrix}}=\frac{\left(k-\omega^2 m\right)\hat{f}}{\left(3k-\omega^2 2m\right)\left(k-\omega^2 m\right)-k^2},$$

$$\hat{x}_2=\frac{\begin{vmatrix}3k-\omega^2 2m & 1\\ -k & 0\end{vmatrix}\hat{f}}{\begin{vmatrix}3k-\omega^2 2m & -k\\ -k & k-\omega^2 m\end{vmatrix}}=\frac{k\hat{f}}{\left(3k-\omega^2 2m\right)\left(k-\omega^2 m\right)-k^2},$$

sau, într-o formă apropiată de cea obținută prin analiză modală

$$\hat{x}_1 = \frac{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\hat{f}}{2m\left(\frac{k}{2m} - \omega^2\right)\left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right)}, \qquad \hat{x}_2 = \frac{\frac{k}{m}\hat{f}}{2m\left(\frac{k}{2m} - \omega^2\right)\left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right)}.$$

La numitor apare determinantul caracteristic, care face ca amplitudinile să crească la infinit atunci când pulsația excitatoare devine egală cu una din pulsațiile proprii. Sistemul are două rezonanțe.

3.2 Vibrații de torsiune

În cele ce urmează se studiază sisteme disc-arbore cu două grade de libertate, în care discurile rigide au vibrații unghiulare față de axa arborelui.

3.2.1 Ecuațiile de mişcare

Se consideră sistemul din fig. 3.6, *a* compus din două discuri cu momente de inerție masice polare J_1 şi J_2, kgm^2, montate pe arbori cu rigidități torsionale K_1, K_2 şi K_3, $\mathrm{Nm/rad}$, de masă neglijabilă.

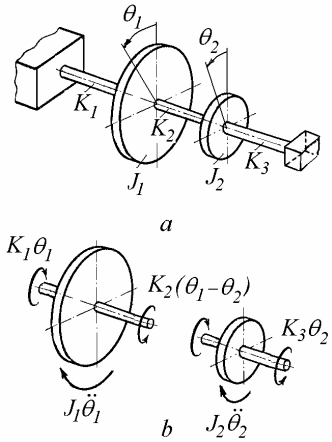


Fig. 3.6

Fie θ_1 şi θ_2 unghiurile instantanee ale discurilor față de poziția de echilibru static. Utilizând diagramele de momente din fig. 3.6, *b* şi principiul lui d'Alembert (echilibrul dinamic al cuplurilor exterioare şi de inerție), ecuațiile de mişcare se scriu sub forma

$$J_1\ddot{\theta}_1 + K_1\theta_1 + K_2\left(\theta_1 - \theta_2\right) = 0,$$
$$J_2\ddot{\theta}_2 + K_3\theta_2 - K_2\left(\theta_1 - \theta_2\right) = 0,$$

sau

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\theta}_1 + \left(K_1 + K_2\right)\theta_1 - K_2\theta_2 &= 0, \\ J_2\ddot{\theta}_2 - K_2\theta_1 + \left(K_3 + K_2\right)\theta_2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Acesta este un sistem de ecuaţii diferenţiale asemănator sistemului (3.1). Există o analogie completă între sistemele în vibraţii de translaţie şi cele în vibraţii torsionale, echivalentul arcurilor, maselor şi forţelor fiind respectiv arcurile de torsiune, discurile (care au momente de inerţie masice) şi cuplurile. Toate rezultatele stabilite în §3.1 se pot aplica sistemelor torsionale. În continuare se studiază doar sisteme care pot avea mişcări generale de corp rigid, fără constrângeri.

3.2.2 Sistemul disc-arbore-disc

Arborele dintre o pompă (sau un ventilator) şi motorul electric de acţionare se poate roti în lagăre ca un corp rigid. Există numeroase sisteme inginereşti care pot fi modelate printr-un sistem torsional cu două discuri, fără constrângeri la rotaţie (fig. 3.7). Cele două discuri, care modelează rotoarele motorului şi maşinii antrenate, sunt legate printr-un arc torsional care modelează arborii (conducător şi condus ai) celor două maşini şi cuplajul dintre aceştia.

Momentele de inerţie masice polare ale discurilor se notează J_1 şi J_2, iar rigiditatea torsională a arborelui de masă neglijabilă se notează $K = G\,I_p \big/ \ell$.

Ecuaţiile de mişcare

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\theta}_1 + K\theta_1 - K\theta_2 &= 0, \\ J_2\ddot{\theta}_2 - K\theta_1 + K\theta_2 &= 0, \end{aligned} \tag{3.46}$$

pot fi scrise matricial

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{3.46, a}$$

sau, în formă compactă,

$$\left[J\right]\left\{\ddot{\theta}\right\} + \left[K\right]\left\{\theta\right\} = \left\{0\right\}.$$

Matricea de rigiditate $\left[K\right]$ este pozitiv semidefinită. Deoarece sistemul nu este legat de un reper fix, matricea de rigiditate este singulară. Sistemul se poate roti liber, având o mişcare de corp rigid în care energia potenţială este nulă.

Aparent, sistemul are două grade de libertate. Totuşi, adunând ecuațiile (3.46), se obține

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + J_2 \ddot{\theta}_2 = 0\,, \tag{3.47}$$

astfel că cele două coordonate θ_1 şi θ_2 nu sunt independente. Integrând, se poate obține o relație de legătură între ele, care poate fi utilizată pentru a elimina una din coordonate din formularea problemei.

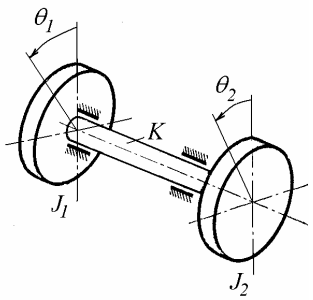


Fig. 3.7

Împărțind prima ecuație (3.46) cu J_1, a doua ecuație cu J_2 şi scăzând ecuațiile rezultate, se obține

$$\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{K}{J_1} + \frac{K}{J_2}\right)\left(\theta_1 - \theta_2\right) = 0\,. \tag{3.48}$$

Notând unghiul de răsucire $\theta_1 - \theta_2 = \theta$, ecuația (3.48) devine

$$\frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2}\ddot{\theta} + K\,\theta = 0\,, \tag{3.48, a}$$

care are forma ecuației de mişcare a unui sistem cu un grad de libertate.

3.2.2.1 Modurile proprii de vibrație

Înlocuind în (3.46) soluții de forma

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= a_1 \cos\left(\omega t - \varphi\right), \\ \theta_2(t) &= a_2 \cos\left(\omega t - \varphi\right), \end{aligned} \tag{3.49}$$

se obține sistemul de ecuații algebrice liniare

$$\begin{aligned}\left(K - J_1\omega^2\right)a_1 - K\,a_2 &= 0,\\ -K\,a_1 + \left(K - J_2\,\omega^2\right)a_2 &= 0.\end{aligned} \tag{3.50}$$

Împărțind prin K şi notând

$$\omega^2 J_1/K = \alpha \tag{3.51}$$

ecuațiile (3.50) devin

$$\begin{aligned}\left(1-\alpha\right)a_1 - a_2 &= 0,\\ -a_1 + \left(1 - \frac{J_2}{J_1}\alpha\right)a_2 &= 0.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Ecuațiile omogene simultane (3.52) admit soluții nebanale dacă determinantul coeficienților variabilelor a_1 şi a_2 este zero

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha & -1 \\ -1 & 1-\dfrac{J_2}{J_1}\alpha \end{vmatrix} = 0 \tag{3.53}$$

sau

$$\frac{J_2}{J_1}\alpha^2 - \left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right)\alpha = 0\,. \tag{3.53, a}$$

Soluțiile ecuației (3.53, *a*) sunt

$$\alpha_1 = 0\,, \qquad \alpha_2 = 1 + J_1/J_2\,. \tag{3.54}$$

Prima pulsație proprie este dată de $\omega_1^2 = 0$ iar a doua de

$$\omega_2^2 = \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right)K\,. \tag{3.55}$$

Rădăcina $\omega_1^2 = 0$ arată că sunt posibile deplasări de corp rigid. Acestea pot fi produse de o deplasare unghiulară statică sau de rotirea cu viteză unghiulară constantă. Ele nu sunt vibrații propriu-zise. Soluțiile ecuațiilor (3.46) sunt de forma

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= C_1 + C_2\,t + C_3\sin\omega_2 t + C_4\cos\omega_2 t,\\ \theta_2(t) &= C_1 + C_2\,t + \left(1 - J_1\omega_2^2/K\right)\left(C_3\sin\omega_2\,t + C_4\cos\omega_2\,t\right),\end{aligned}$$

unde $C_1,..,C_4$ sunt constante de integrare.

Formele modale sunt determinate de raportul $\mu = a_2/a_1 = 1-\alpha$.

Pentru primul mod

$$\mu_1 = (a_2/a_1)_1 = 1 - \alpha_1 = 1\,, \qquad (3.56,\ a)$$

ambele discuri au aceeaşi deplasare unghiulară, ceea ce defineşte o rotaţie de corp rigid în care arborele nu este răsucit.

Pentru modul al doilea

$$\mu_2 = (a_2/a_1)_2 = 1 - \alpha_2 = -J_1/J_2\,, \qquad (3.56,\ b)$$

discurile vibrează în opoziţie. Arborele are un punct nodal dispus mai aproape de discul cu moment de inerţie mai mare.

Formele modurilor proprii de vibraţie sunt prezentate în fig. 3.8.

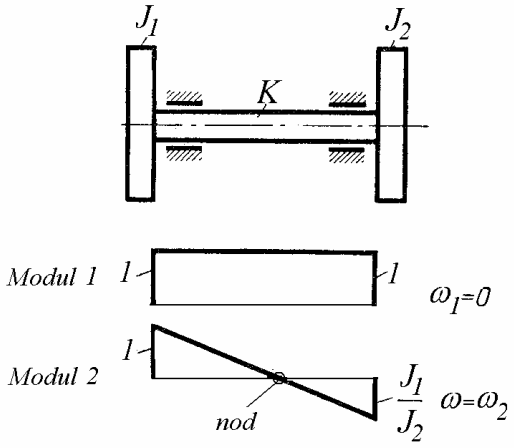


Fig. 3.8

3.2.2.2 Răspunsul la excitaţie armonică

Se consideră sistemul din fig. 3.6, acţionat de un cuplu armonic $M(t) = M_0 \cos\omega t$ (ne figurat) aplicat discului al doilea. Ecuaţiile de mişcare sunt

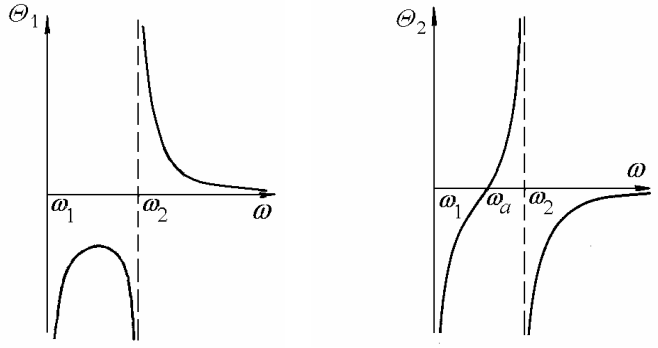
$$\begin{aligned} &J_1 \ddot{\theta}_1 + K\theta_1 - K\theta_2 = 0, \\ &J_2 \ddot{\theta}_2 - K\theta_1 + K\theta_2 = M_0 \cos\omega t. \end{aligned} \qquad (3.57)$$

Vibraţiile staţionare ale acestui sistem sunt de forma

$$\theta_1(t) = \Theta_1 \cos\omega t\,, \qquad \theta_2(t) = \Theta_2 \cos\omega t\,. \qquad (3.58)$$

Rezultă ecuaţiile algebrice

$$\begin{aligned}&\left(K-J_1\omega^2\right)\Theta_1-K\,\Theta_2=0,\\&-K\Theta_1+\left(K-J_2\omega^2\right)\Theta_2=M_0.\end{aligned}\tag{3.59}$$



a *b*

Fig. 3.9

Împărţind prin *K* şi notând $\omega^2 J_1/K=\alpha$, se obţine

$$\begin{aligned}&\left(1-\alpha\right)\Theta_1-\Theta_2=0,\\&-\Theta_1+\left(1-\frac{J_2}{J_1}\alpha\right)\Theta_2=\frac{M_0}{K}.\end{aligned}\tag{3.60}$$

Rezolvând pentru Θ_1 şi Θ_2, utilizând regula lui Cramer, rezultă

$$\Theta_1=\frac{\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1-\dfrac{J_2}{J_1}\alpha\end{vmatrix}\dfrac{M_0}{K}}{\begin{vmatrix}1-\alpha & -1\\ -1 & 1-\dfrac{J_2}{J_1}\alpha\end{vmatrix}}=\frac{1}{\dfrac{J_2}{J_1}\left(\alpha-\dfrac{J_1+J_2}{J_2}\right)\alpha}\frac{M_0}{K},\tag{3.61}$$

$$\Theta_2=\frac{\begin{vmatrix}1-\alpha & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}\dfrac{M_0}{K}}{\begin{vmatrix}1-\alpha & -1\\ -1 & 1-\dfrac{J_2}{J_1}\alpha\end{vmatrix}}=\frac{1-\alpha}{\dfrac{J_2}{J_1}\left(\alpha-\dfrac{J_1+J_2}{J_2}\right)\alpha}\frac{M_0}{K}.\tag{3.62}$$

Amplitudinile Θ_1 şi Θ_2 sunt reprezentate grafic în fig. 3.9 în funcție de pulsația excitatoare. Ambele amplitudini unghiulare devin infinite când numitorul expresiilor (3.61)-(3.62) este zero, deci când pulsația cuplului exterior devine egală cu una din pulsațiile proprii. Există un fel de "rezonanță la pulsație nulă" corespunzătoare modului de corp rigid şi o rezonanță adevărată la $\omega_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{J_1}+\frac{1}{J_2}\right)K}$.

Amplitudinea discului al doilea este zero când $\alpha = 1$. Această antirezonanță apare la $\omega = \sqrt{K/J_1}$, pulsația proprie a subsistemului format din arbore şi primul disc, care acționează ca un absorbitor dinamic şi menține discul al doilea fix în spațiu.

3.2.2.3 Tensiuni dinamice

Amplitudinea unghiului de răsucire al arborelui este

$$\Delta\Theta = \Theta_2 - \Theta_1 = \frac{1}{\frac{J_2}{J_1}\left(\frac{J_1+J_2}{J_2}-\alpha\right)}\frac{M_0}{K}. \tag{3.63}$$

Notând momentul de răsucire în arbore prin $M_t = M_{t_0}\cos\omega t$, amplitudinea sa este

$$M_{t_0} = K\,\Delta\Theta = \frac{M_0}{\frac{J_2}{J_1}\left(\frac{J_1+J_2}{J_2}-\alpha\right)}. \tag{3.64}$$

Tensiunile tangențiale de răsucire sunt de forma $\tau = \tau_0\cos\omega t$, iar amplitudinea lor este

$$\tau_0 = M_{t_0}/W_p, \tag{3.65}$$

unde W_p este modulul de rezistență polar al secțiunii transversale a arborelui.

Dacă arborele transmite o putere *N,* la viteza unghiulară constantă ω_N, atunci tensiunile de forfecare "statice" sunt

$$\tau_N = M_{t_{st}}/W_p = N/\left(\omega_N W_p\right). \tag{3.66}$$

Utilizând valorile lui τ_0 şi τ_N se poate face un calcul al coeficientului de siguranță la oboseală, considerând o variație în timp a tensiunilor ca în fig. 3.10.

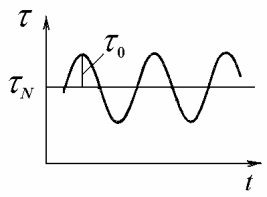


Fig. 3.10

Exemplul 3.4

Sistemul torsional din fig. 3.6 este acţionat de un cuplu armonic de amplitudine $M_0 = 10^4\,\mathrm{Nm}$ şi pulsaţie $\omega = 314\,\mathrm{rad/s}$ (ne figurat). Ambele discuri au acelaşi moment de inerţie masic polar $J = 57\,\mathrm{kgm}^2$. Arborele are lungimea $\ell = 0{,}4\,\mathrm{m}$, diametrul $d = 0{,}14\,\mathrm{m}$ şi modulul de elasticitate transversal $G = 81\,\mathrm{GPa}$. Se cere amplitudinea tensiunilor tangenţiale dinamice din arbore.

Rezolvare. Secţiunea transversală a arborelui are caracteristicile $I_p = \pi d^4/32 = 0{,}377 \cdot 10^8\,\mathrm{mm}^4$ şi $W_p = \pi d^3/16 = 0{,}538 \cdot 10^6\,\mathrm{mm}^3$. Rigiditatea torsională este $K = G I_p/\ell = 7{,}63 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,mm/rad}$. Raportul adimensional $\alpha = J\omega^2/K = 0{,}735$. Unghiul de răsucire $\Delta\Theta = M_0/K(2-\alpha) = 0{,}001036\ \mathrm{rad}$. Amplitudinea momentului de răsucire dinamic este $M_{t_0} = M_0/(2-\alpha) = 7910\,\mathrm{Nm}$. Amplitudinea tensiunilor tangenţiale dinamice este $\tau_0 = M_{t_0}/W_p = 14{,}7\ \mathrm{N/mm}^2$.

3.2.3 Sisteme cu roţi dinţate

Sistemul torsional din fig. 3.11, *a* are un angrenaj cu roţi dinţate. Pinionul de pe arborele *1* are raza (cercului primitiv) r_1 iar roata de pe arborele *2* are raza r_2. Se presupune că roţile dinţate sunt rigide, de inerţie neglijabilă şi în contact permanent. Raportul de transmisie este

$$i = \frac{r_1}{r_2} = -\frac{n_2}{n_1} = -\frac{\theta_2}{\theta_1}, \tag{3.67}$$

unde n_1 şi n_2 sunt turaţiile celor doi arbori, θ_1 şi θ_2 sunt deplasările unghiulare corespunzătoare.

Sistemul torsional cu roţi dinţate este redus la un sistem echivalent fără roţi dinţate (fig. 3.11, *b*). În procesul de reducere, rigiditatea arborelui echivalent se determină din condiţia egalităţii energiilor potenţiale

$$\left(K\theta^2\right)_{real} = \left(K\theta^2\right)_{ech},$$

de unde rezultă

$$K_{ech} = \left(\frac{\theta_{real}}{\theta_{ech}}\right)^2 K_{real} = \left(\frac{n_{real}}{n_{ech}}\right)^2 K_{real} = i^2 K_{real}. \qquad (3.68)$$

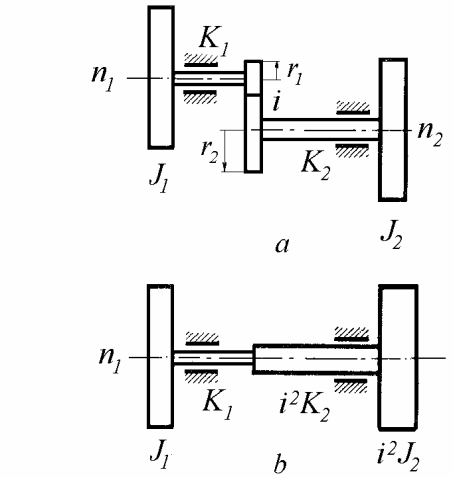


Fig. 3.11

Momentul de inerţie masic polar al discului echivalent se determină din condiţia egalităţii energiilor cinetice

$$\left(J\dot{\theta}^2\right)_{real} = \left(J\dot{\theta}^2\right)_{ech},$$

de unde rezultă

$$J_{ech} = \left(\frac{\dot{\theta}_{real}}{\dot{\theta}_{ech}}\right)^2 J_{real} = \left(\frac{n_{real}}{n_{ech}}\right)^2 J_{real} = i^2 J_{real}. \qquad (3.69)$$

Alegând arborele *1* ca referinţă, parametrii echivalenţi ai arborelui *2* sunt (fig. 3.11, *b*)

$$K_{2\,ech} = i^2 K_2, \quad J_{2\,ech} = i^2 J_2. \qquad (3.70)$$

Când roţile dinţate au inerţie neglijabilă, se aplică următoarele reguli pentru construcţia sistemelor echivalente: Se *înlătură toate roţile dinţate şi se înmulţesc toate rigidităţile şi momentele de inerţie cu* i^2*, unde -i este raportul între turaţia arborelui redus şi turaţia arborelui de referinţă.*

După determinarea formei modurilor de vibrație ale sistemului echivalent, formele modale şi momentele de răsucire ale sistemului real se obțin utilizând relațiile de compatibilitate

$$\theta_{real}/\theta_{ech} = -i\,, \qquad M_{ech}/M_{real} = -i\,. \tag{3.71}$$

3.2.4 Sisteme ramificate cu roți dințate

Sistemul ramificat din fig. 3.12, *a* are roți dințate şi arbori cu inerție neglijabilă. El poate fi înlocuit prin modelul echivalent din fig. 3.12, *b* în care raportul de transmisie este -1, înmulțind rigiditatea şi momentul de inerție din ramura *2-3* cu pătratul raportului de transmisie. Momentele de răsucire şi deplasările unghiulare în ramura redusă echivalentă diferă de valorile reale, conform relațiilor (3.71).

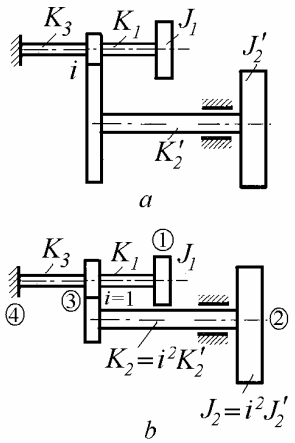


Fig. 3.12

Ecuațiile de mişcare se pot scrie folosind metoda elementelor finite. Un arbore de secțiune constantă este considerat un element finit cu rigiditate la torsiune *K*. Punctele de legătură ale arborelui cu alte componente ale sistemului vibrator se numesc *noduri* (nu trebuie confundate cu punctele fixe ale formelor modale), fiind numerotate *1* şi *2* în fig. 3.13.

Cuplurile M_1 şi M_2 pot fi exprimate în funcție de rotirile θ_1 şi θ_2 utilizând ecuațiile de echilibru şi relațiile cuplu/rotație

$$\begin{aligned} M_1 &= -M_2 = K\,\theta_1 \quad \text{pentru} \quad \theta_2 = 0, \\ M_1 &= -M_2 = -K\,\theta_2 \quad \text{pentru} \quad \theta_1 = 0. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Ecuațiile (3.72) se pot scrie matricial sub forma

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{3.73}$$

sau condensat $\{ M \} = [k^e] \{ \theta \}$, unde $[k^e]$ este matricea de rigiditate a elementului.

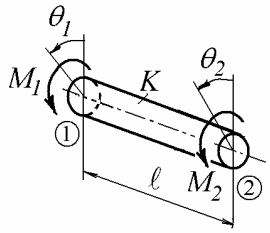


Fig. 3.13

Utilizând ecuația (3.73), relația cuplu-rotație pentru fiecare arbore din fig. 3.12, *b* se poate scrie

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_3 & -K_3 \\ -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}.$$

Cele trei relații de mai sus se pot expanda după cum urmează

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & -K_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & 0 & K_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & -K_2 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 & -K_3 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}.$$

Cuplurile din sistem se obțin însumând cuplurile care acționează în fiecare nod. Adunând matricile de rigiditate expandate se obține

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & -K_1 & 0 \\ 0 & K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_1 & -K_2 & K_1+K_2+K_3 & -K_3 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}. \quad (3.74)$$

Utilizând condiția la limită $\theta_4 = 0$, se obține matricea de rigiditate redusă a sistemului. Rezultă ecuațiile de mișcare

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 & -K_1 \\ 0 & K_2 & -K_2 \\ -K_1 & -K_2 & K_1+K_2+K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.75)$$

Eliminând coordonata θ_3 folosind a treia ecuație

$$-K_1\theta_1 - K_2\theta_2 + (K_1+K_2+K_3)\theta_3 = 0$$

se obțin două ecuații de forma

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\theta}_1 + \frac{K_1(K_2+K_3)}{K_1+K_2+K_3}\theta_1 - \frac{K_1K_2}{K_1+K_2+K_3}\theta_2 = 0, \\ J_2\ddot{\theta}_2 - \frac{K_1K_2}{K_1+K_2+K_3}\theta_1 + \frac{K_2(K_1+K_3)}{K_1+K_2+K_3}\theta_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

După rezolvarea problemei de valori proprii, pentru a determina formele modale reale, amplitudinile unghiulare Θ_2, determinate pentru sistemul echivalent, trebuie transformate în amplitudini reale folosind relațiile (3.71). Un procedeu mai direct de rezolvare este prezentat în § 4.1.3.

3.3 Vibrații de încovoiere

În acest paragraf se studiază bare şi cadre plane cu masa proprie neglijabilă pe care sunt montate mase rigide. La aceste sisteme este convenabilă utilizarea flexibilităților în locul rigidităților, primele fiind cantități măsurabile experimental.

3.3.1 Flexibilități (coeficienți de influență)

Bara în consolă din fig. 3.14, *a* este solicitată de forțele f_1 şi f_2 aplicate în punctele *1,* respectiv *2*. Deplasările transversale (săgețile) pe direcțiile forțelor f_1 şi f_2 sunt y_1, respectiv y_2.

Asupra unei bare cu aceeaşi rezemare (fig. 3.14, *b*) se aplică o forţă de mărime egală cu unitatea, în punctul *1* pe direcţia forţei f_1. Deplasările în *1* şi *2,* pe direcţiile y_1 şi y_2, se notează δ_{11}, respectiv δ_{21}. O forţă egală cu 1 aplicată în punctul *2* pe direcţia forţei f_2 produce deplasările δ_{12} şi δ_{22} (fig. 3.14, *c*).

Relaţiile între forţele f_1, f_2 şi deplasările totale y_1, y_2 se pot scrie, aplicând principiul suprapunerii efectelor, sub forma

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11} f_1 + \delta_{12} f_2, \\ y_2 &= \delta_{21} f_1 + \delta_{22} f_2. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Coeficienţii δ_{ij} se numesc *flexibilităţi (coeficienţi de influenţă).*

Prin definiţie, δ_{ij} este deplasarea (în punctul şi pe direcţia) coordonatei *i* datorită unei forţe de amplitudine egală cu 1 aplicată (în punctul şi pe direcţia) coordonatei *j*.

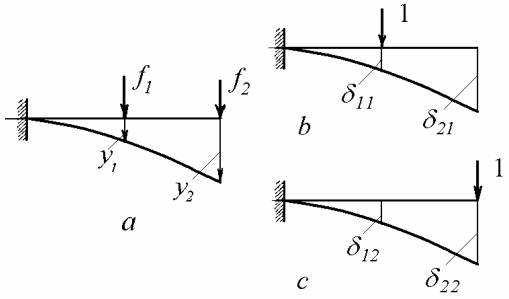


Fig. 3.14

În notaţie matricială, relaţiile (3.77) devin

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \tag{3.77, a}$$

sau

$$\{y\} = [\delta]\{f\}, \tag{3.78}$$

unde $[\delta]$ este *matricea de flexibilitate* a sistemului.

Matricea de flexibilitate este simetrică $[\delta]^{\mathrm{T}} = [\delta]$, în virtutea teoremei de reciprocitate a lui Maxwell: *Deplasarea într-un punct al unei structuri produsă de o forţă unitate aplicată în alt punct este egală cu deplasarea în al doilea punct produsă de o forţă unitate aplicată în primul punct* (deplasările – de translaţie sau rotaţie, se măsoară în aceeaşi direcţie ca sarcinile – forţă sau moment).

Deoarece într-o ecuație de forma $\{f\}=[k]\{y\}$ matricea $[k]$ este o *matrice de rigiditate*, rezultă că $[k]=[\delta]^{-1}$ sau, echivalent, matricea de flexibilitate este inversa matricei de rigiditate

$$[\delta]=[k]^{-1}. \tag{3.79}$$

Când în sistem sunt posibile mişcări de corp rigid, matricea $[k]$ este singulară şi $[\delta]=[k]^{-1}$ nu există.

3.3.2 Ecuațiile de mişcare

Pe bara cu greutate neglijabilă din fig. 3.15, *a* şi cu modulul de rigiditate la încovoiere $EI = const.$ sunt montate masele m_1 şi m_2 în punctele *1* şi *2*. Dacă interesează numai deplasările laterale ale celor două mase, mişcarea sistemului este complet determinată de deplasările y_1 şi y_2, deci sistemul are două grade de libertate.

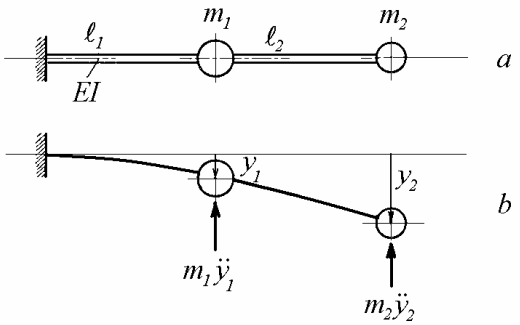


Fig. 3.15

În vibrații libere (fig. 3.15, *b*), aplicând principiul lui d'Alembert, asupra sistemului acționează doar forțele de inerție

$$f_1 = -m_1\ddot{y}_1, \quad f_2 = -m_2\ddot{y}_2. \tag{3.80}$$

Înlocuind aceste forțe în relațiile (3.77), se obțin ecuațiile diferențiale ale mişcării

$$\begin{aligned} &\delta_{11}m_1\ddot{y}_1 + \delta_{12}m_2\ddot{y}_2 + y_1 = 0, \\ &\delta_{21}m_1\ddot{y}_1 + \delta_{22}m_2\ddot{y}_2 + y_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.81}$$

În notație matricială

$$[b]\{\ddot{y}\}+\{y\}=\{0\}. \tag{3.82}$$

Matricea $[b]$ poate fi descompusă în produs sub forma

$$[b]=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \delta_{11} m_1 & \delta_{12} m_2 \\ \delta_{21} m_1 & \delta_{22} m_2 \end{bmatrix}=[\delta][m], \qquad (3.83)$$

unde $[m]$ este matricea diagonală a maselor.

În ecuațiile (3.81) cuplajul este produs de elementele nediagonale ale matricii de flexibilitate.

3.3.3 Moduri proprii de vibrație

Înlocuind soluții de forma

$$\{y\}=\{a\}\cos(\omega t-\varphi), \qquad (3.84)$$

ecuația (3.81) devine

$$-\omega^2[b]\{a\}+\{a\}=\{0\}$$

sau

$$[b]\{a\}=\frac{1}{\omega^2}\{a\}. \qquad (3.85)$$

Aceasta este o problemă standard de valori proprii, în care $\lambda=1/\omega^2$ sunt *valorile proprii* iar $\{a\}$ sunt *vectorii proprii*. Valorile proprii sunt inversele pătratelor pulsațiilor proprii, iar vectorii proprii sunt vectorii modali care definesc forma modurilor proprii de vibrație.

Ecuațiile (3.85) se pot scrie sub forma

$$\begin{aligned} &\left(b_{11}\omega^2-1\right)a_1+b_{12}\omega^2 a_2=0, \\ &b_{21}\omega^2 a_1+\left(b_{22}\omega^2-1\right)a_2=0. \end{aligned} \qquad (3.85, a)$$

Condiția de a avea soluții nebanale conduce la ecuația pulsațiilor proprii

$$\left(b_{11}\omega^2-1\right)\left(b_{22}\omega^2-1\right)-b_{12}b_{21}\omega^4=0,$$

sau

$$\left(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}\right)\omega^4-\left(b_{11}+b_{22}\right)\omega^2+1=0. \qquad (3.86)$$

Ecuația (3.86) are două rădăcini reale pozitive ω_1^2 şi ω_2^2, pătratele pulsațiilor proprii.

Forma modurilor proprii este definită de raportul $\mu=a_2/a_1$, numit *coeficient de distribuție*, care devine

$$\mu_1 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)_1 = \frac{1 - b_{11}\omega_1^2}{b_{12}\,\omega_1^2}, \quad \mu_2 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)_2 = \frac{1 - b_{11}\omega_2^2}{b_{12}\,\omega_2^2}. \qquad (3.87)$$

Exemplul 3.5

Se cer modurile proprii de vibraţie ale barei din fig. 3.15, *a* unde $\ell_1 = \ell_2 = \ell/2$, $m_1 = m_2 = m$ şi $EI = const.$

Rezolvare. Coeficienţii de flexibilitate au următoarele expresii

$$\delta_{11} = \ell^3/24EI\,,\ \delta_{12} = \delta_{21} = 5\ell^3/48EI\,,\quad \delta_{22} = \ell^3/3EI\,.$$

Matricea de flexibilitate este

$$[\delta] = \frac{\ell^3}{48EI}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}.$$

Ecuaţia (3.85) se poate scrie sub forma

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

în care

$$\lambda = 48\,EI/m\ell^3\omega^2\,.$$

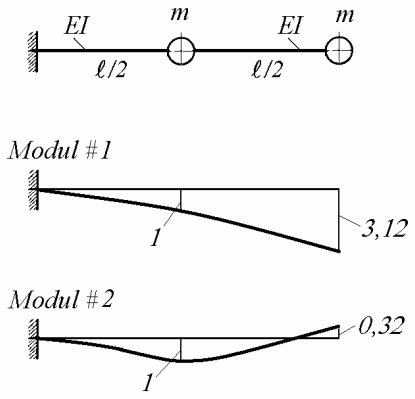


Fig. 3.16

Ecuaţia pulsaţiilor proprii este

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 5 & 16-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{sau} \qquad \lambda^2 - 18\lambda + 7 = 0\,,$$

având rădăcinile

$$\lambda_1 = 17{,}602 \qquad \text{şi} \qquad \lambda_2 = 0{,}3976 .$$

Pulsațiile proprii sunt

$$\omega_1 = 1{,}6503\sqrt{EI/m\ell^3} , \qquad \omega_2 = 10{,}986\sqrt{EI/m\ell^3} .$$

Formele modale sunt definite de raportul $\mu = a_2/a_1 = \lambda - 2/5$ care are valorile

$$\mu_1 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)_1 = \frac{\lambda_1 - 2}{5} = 3{,}12 , \qquad \mu_2 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)_2 = \frac{\lambda_2 - 2}{5} = -0{,}32 .$$

Forma modurilor proprii de vibrație este reprezentată grafic în fig. 3.16.

3.3.4 Vibrațiile libere

Se notează cu

$$[\,u\,] = \left[\{u\}_1 \quad \{u\}_2\right] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \tag{3.88}$$

matricea vectorilor modali normalizați, denumită *matricea modală*.

Deplasările reale, notate în continuare prin $\{x\}$ în loc de $\{y\}$, pot fi exprimate în funcție de coordonatele modale ca în relația (3.23)

$$\{x\} = [u]\{q\} = \{u\}_1 q_1 + \{u\}_2 q_2 = \sum_{i=1}^{2} C_i \cos\left(\omega_i t - \varphi_i\right)\{u\}_i . \tag{3.89}$$

Constantele C_i şi φ_i se determină din condițiile inițiale ale mişcării

$$\{x(0)\} = \sum_{i=1}^{2} C_i \cos\varphi_i \{u\}_i , \tag{3.90}$$

$$\{\dot{x}(0)\} = \sum_{i=1}^{2} \omega_i C_i \sin\varphi_i \{u\}_i . \tag{3.91}$$

Înmulțind la stânga relațiile (3.90) şi (3.91) cu $\{u\}_j^{\mathrm{T}}[m]$, utilizând relațiile de ortogonalitate (3.18) - (3.19) şi definițiile (3.25) şi (3.28) ale maselor modale

$$\{u\}_j^{\mathrm{T}}[m]\{u\}_i = 0 , \quad i \neq j \qquad M_i = \{u\}_i^{\mathrm{T}}[m]\{u\}_i , \quad i = 1,2 \tag{3.92}$$

rezultă

$$\{u\}_j^{\mathrm{T}}[m]\{x(0)\} = C_j M_j \cos\varphi_j, \qquad j = 1,\ 2 \qquad (3.93)$$

$$\{u\}_j^{\mathrm{T}}[m]\{\dot{x}(0)\} = \omega_j C_j M_j \sin\varphi_j. \qquad j = 1,\ 2 \qquad (3.94)$$

Combinând ecuaţiile (3.93) şi (3.94), şi schimbând indicele se obţine

$$\operatorname{tg}\varphi_i = \frac{\{u\}_i^{\mathrm{T}}[m]\{\dot{x}(0)\}}{\omega_i \{u\}_i^{\mathrm{T}}[m]\{x(0)\}}, \qquad i = 1,2 \qquad (3.95)$$

şi

$$C_i = \frac{\{u\}_i^{\mathrm{T}}[m]\{x(0)\}}{M_i \cos\varphi_i} = \frac{\{u\}_i^{\mathrm{T}}[m]\{\dot{x}(0)\}}{\omega_i\ M_i \sin\varphi_i}. \qquad i = 1,2 \qquad (3.96)$$

Exemplul 3.6

La sistemul din fig. 3.17 se cere: a) să se determine modurile proprii de vibraţie; b) să se stabilească ecuaţiile vibraţiilor libere când masa are o viteză iniţială verticală v şi să se calculeze ecuaţia traiectoriei masei.

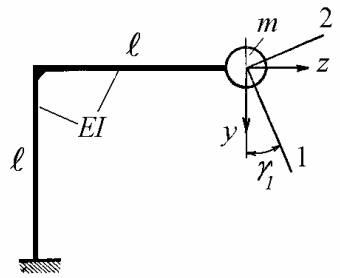


Fig. 3.17

Rezolvare. a) Fie y şi z componentele verticală şi orizontală ale deplasării instantanee a masei m.

Coeficienţii de flexibilitate sunt

$$\delta_{yy} = 4\ell^3/3EI, \quad \delta_{yz} = \delta_{zy} = \ell^3/2EI, \quad \delta_{zz} = \ell^3/3EI.$$

Ecuaţiile de mişcare au forma

$$\frac{4\ell^3}{3EI}m\ddot{y}+\frac{\ell^3}{2EI}m\ddot{z}+y=0,$$
$$\frac{\ell^3}{2EI}m\ddot{y}+\frac{\ell^3}{3EI}m\ddot{z}+z=0.$$

Căutând soluții de forma

$$y(t)=u_1\cos(\omega t-\varphi),\qquad z(t)=u_2\cos(\omega t-\varphi),$$

se obține sistemul algebric

$$(8-\beta)u_1+3u_2=0,$$
$$3u_1+(2-\beta)u_2=0,$$

unde s-a notat

$$\beta=6EI/m\ell^3\omega^2.$$

Ecuația pulsațiilor proprii este

$$\begin{vmatrix}8-\beta & 3\\ 3 & 2-\beta\end{vmatrix}=0,\qquad \beta^2-10\beta+7=0,$$

având rădăcinile

$$\beta_1=9{,}2426,\quad \beta_2=0{,}7574.$$

Pulsațiile proprii sunt

$$\omega_1=0{,}8057\sqrt{EI/m\ell^3},\qquad \omega_2=2{,}8146\sqrt{EI/m\ell^3}.$$

Forma modurilor proprii este definită de coeficienții de distribuție

$$\mu_1=\left(\frac{u_2}{u_1}\right)_1=\frac{u_{21}}{u_{11}}=\frac{\beta_1-8}{3}=0{,}4142,\quad \mu_2=\left(\frac{u_2}{u_1}\right)_2=\frac{u_{22}}{u_{12}}=\frac{\beta_2-8}{3}=-2{,}4142.$$

Vectorii modali, normalizați cu primul element egal cu unitatea, sunt

$$\{u\}_1=\begin{Bmatrix}1\\ 0{,}4142\end{Bmatrix},\qquad \{u\}_2=\begin{Bmatrix}1\\ -2{,}4142\end{Bmatrix}.$$

Se pot stabili următoarele relații

$$\frac{u_{21}}{u_{11}}=\operatorname{tg}\gamma_1=0{,}4142,\qquad \gamma_1=22{,}5^0,$$

$$\frac{u_{22}}{u_{12}}=\operatorname{tg}\gamma_2=-2{,}4142,\qquad \gamma_2=112{,}5^0=\gamma_1+90^0.$$

În modurile proprii de vibraţie, masa *m* are o mişcare rectilinie. Vectorii modali sunt ortogonali $\{u\}_1^{\mathrm{T}}\{u\}_2 = 0$. Mişcarea în primul mod de vibraţie are loc pe direcţia *1,* la $22{,}5^0$ faţă de verticală. Mişcarea în al doilea mod de vibraţie are loc pe direcţia *2,* la $122{,}5^0$ faţă de verticală, deci perpendicular pe direcţia *1*. Aceasta se întâmplă deoarece deplasarea în coordonatele modale are loc pe direcţiile principale de flexibilitate.

Matricea de flexibilitate

$$[\delta] = \frac{\ell^3}{6EI}\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

este un factor de proporţionalitate între vectorul componentelor *y* şi *z* ale deplasării, şi vectorul componentelor f_y şi f_z ale unei forţe aplicate în punctul de ataşare a masei

$$\begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{yy} & \delta_{yz} \\ \delta_{zy} & \delta_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} f_y \\ f_z \end{Bmatrix}.$$

Se consideră sistemul de axe y^*Oz^*, rotit cu un unghi γ faţă de sistemul de referinţă yOz. Transformarea deplasărilor se scrie

$$\begin{Bmatrix} y^* \\ z^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix}$$

iar transformarea forţelor este definită de

$$\begin{Bmatrix} f_y^* \\ f_z^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} f_y \\ f_z \end{Bmatrix}.$$

Noua relaţie deplasări-forţe este

$$\begin{Bmatrix} y^* \\ z^* \end{Bmatrix} = [\delta^*]\begin{Bmatrix} f_y^* \\ f_z^* \end{Bmatrix}$$

unde matricea de flexibilitate

$$[\delta^*] = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}[\delta]\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$$

în care s-a notat $c = \cos\gamma$ şi $s = \sin\gamma$.

În sistemul de referinţă rotit, matricea de flexibilitate este

$$\left[\delta^*\right]=\begin{bmatrix} \delta_{yy}c^2+\delta_{zz}s^2+2\delta_{yz}cs & \left(\delta_{zz}-\delta_{yy}\right)sc+\delta_{yz}\left(c^2-s^2\right) \\ \left(\delta_{zz}-\delta_{yy}\right)sc+\delta_{yz}\left(c^2-s^2\right) & \delta_{yy}s^2+\delta_{zz}c^2-2\delta_{yz}cs \end{bmatrix}.$$

Există două unghiuri γ^* pentru care elementele nediagonale ale matricii de flexibilitate se anulează, date de

$$\text{tg}\,2\gamma^*=\frac{2\delta_{yz}}{\delta_{yy}-\delta_{zz}}=\frac{2\cdot 3}{8-2}=1,\quad \gamma_1^*=22{,}5^0,\qquad \gamma_2^*=112{,}5^0.$$

Cele două soluții γ_1^* și γ_2^* definesc *direcțiile principale de flexibilitate*. Înlocuind aceste unghiuri în expresia elementelor diagonale se obțin *flexibilitățile principale*

$$\delta_{1,2}=\frac{\delta_{yy}+\delta_{zz}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\delta_{yy}-\delta_{zz}}{2}\right)^2+\delta_{yz}^2}=\frac{5\pm 3\sqrt{2}}{6}\frac{\ell^3}{EI},$$

$$\delta_1=1{,}5404\frac{\ell^3}{EI},\quad \delta_2=0{,}1262\frac{\ell^3}{EI}.$$

Semnificația fizică este următoarea: o forță aplicată pe direcția *1* (sau *2*) produce o deplasare numai pe direcția *1* (sau *2*). Direcțiile principale de flexibilitate coincid cu direcțiile vibrațiilor în modurile proprii (principale) de vibrație.

Pulsațiile proprii sunt

$$\omega_1=\sqrt{\frac{1}{m\,\delta_1}}=\frac{1}{\sqrt{1{,}5404}}\sqrt{\frac{EI}{m\,\ell^3}}=0{,}805\sqrt{\frac{EI}{m\,\ell^3}},$$

$$\omega_2=\sqrt{\frac{1}{m\,\delta_2}}=\frac{1}{\sqrt{0{,}1262}}\sqrt{\frac{EI}{m\,\ell^3}}=2{,}815\sqrt{\frac{EI}{m\,\ell^3}}.$$

b) Pentru a determina răspunsul liber la un impuls vertical cu viteza v, întâi se calculează masele modale

$$M_1=m\left(u_{11}^2+u_{21}^2\right)=m\left(1+0{,}4142^2\right)=1{,}1716\,m,$$

$$M_2=m\left(u_{12}^2+u_{22}^2\right)=m\left(1+2{,}4142^2\right)=6{,}8284\,m.$$

Condițiile inițiale sunt

$$\left\{x(0)\right\}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix},\quad \left\{\dot{x}(0)\right\}=\begin{Bmatrix}v\\0\end{Bmatrix}.$$

Din relațiile (3.93) și (3.96) rezultă

$$\cos\varphi_1 = 0\,, \qquad \cos\varphi_2 = 0\,,$$

$$C_1 \sin\varphi_1 = \frac{m\,v}{\omega_1 M_1}\,, \qquad C_2 \sin\varphi_2 = \frac{m\,v}{\omega_2 M_2}\,.$$

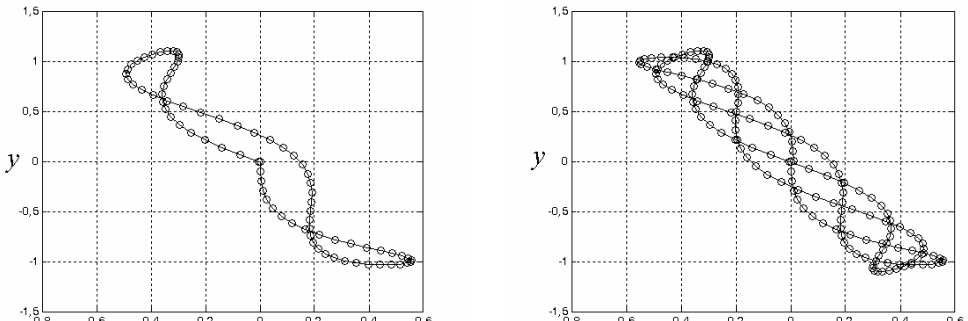


Fig. 3.18

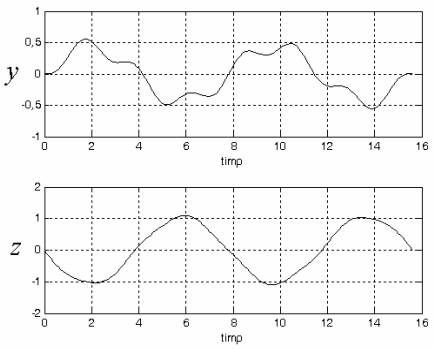


Fig. 3.19

Componenta verticală a deplasării instantanee este

$$y(t) = C_1 \cos\left(\omega_1 t - \varphi_1\right) u_{11} + C_2 \cos\left(\omega_2 t - \varphi_2\right) u_{12}\,,$$

$$y(t) = \frac{m\,v}{\omega_1 M_1} \sin\omega_1 t + \frac{m\,v}{\omega_2 M_2} \sin\omega_2 t\,,$$

$$y(t) = C\left(1{,}0593 \sin\omega_1 t + 0{,}0520 \sin\omega_2 t\right),$$

unde

$$C = v\sqrt{\frac{m\ell^3}{EI}}\ ,\ \omega_1 = 0{,}805\, v/C\ ,\ \ \omega_2 = 2{,}815\, v/C\ .$$

Componenta orizontală a deplasării instantanee este

$$z(t) = C_1 \cos\left(\omega_1 t - \varphi_1\right) u_{21} + C_2 \cos\left(\omega_2 t - \varphi_2\right) u_{22}\,,$$

$$z(t) = \frac{m\, v}{\omega_1 M_1} u_{21} \sin\omega_1 t + \frac{m\, v}{\omega_2 M_2} u_{22} \sin\omega_2 t\ ,$$

$$z(t) = C\left(0{,}4387 \sin\omega_1 t - 0{,}1256 \sin\omega_2 t\right).$$

Traiectoria masei *m* este redată fig. 3.18, *a* pentru o durată a mişcării egală cu $2\pi/\omega_1$, iar în fig. 3.18, *b* pentru o durată $4\pi/\omega_1$. Variația în timp a componentelor *y* şi *z* este reprezentată grafic în fig. 3.19. Deplasarea orizontală este aproape armonică deoarece al doilea termen din expresia acesteia are o amplitudine mai mică decât a primului termen.

3.3.5 Răspunsul la excitație armonică

Se consideră vibrațiile staționare are barei din fig. 3.20, *a* sub acțiunea forței $f(t) = F_0 \cos\omega t$ aplicată masei m_2.

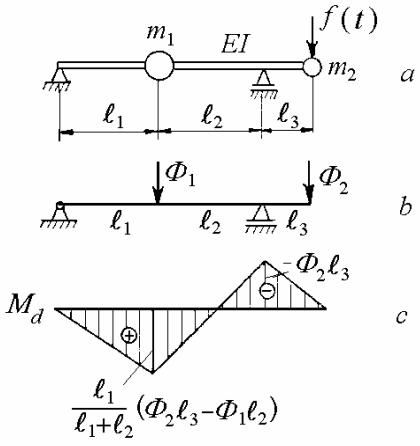


Fig. 3.20

Ecuațiile de mişcare sunt

$$y_1 = -\delta_{11} m_1 \ddot{y}_1 + \left(f - m_2 \ddot{y}_2 \right) \delta_{12},$$
$$y_2 = -\delta_{21} m_1 \ddot{y}_1 + \left(f - m_2 \ddot{y}_2 \right) \delta_{22},$$

sau

$$\begin{aligned} &\delta_{11} m_1 \ddot{y}_1 + \delta_{12} m_2 \ddot{y}_2 + y_1 = \delta_{12} f(t), \\ &\delta_{21} m_1 \ddot{y}_1 + \delta_{22} m_2 \ddot{y}_2 + y_2 = \delta_{22} f(t). \end{aligned} \tag{3.97}$$

Înlocuind soluțiile staționare

$$y_1(t) = Y_1 \cos \omega t, \qquad y_2(t) = Y_2 \cos \omega t,$$

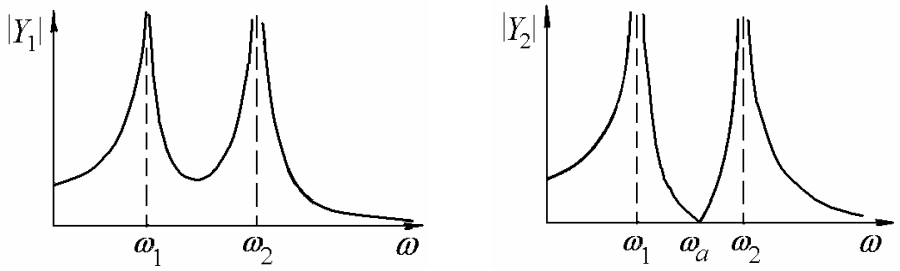
în ecuațiile (3.97), rezultă sistemul algebric

$$\begin{aligned} &\left(1 - \omega^2 \delta_{11} m_1 \right) Y_1 - \omega^2 \delta_{12} m_2 Y_2 = \delta_{12} F_0, \\ &-\omega^2 \delta_{21} m_1 Y_1 + \left(1 - \omega^2 \delta_{22} m_2 \right) Y_2 = \delta_{22} F_0. \end{aligned} \tag{3.98}$$

Amplitudinile deplasărilor maselor sunt

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{\delta_{12}}{1 - \left(\delta_{11} m_1 + \delta_{22} m_2 \right) \omega^2 + m_1 m_2 \left(\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2 \right) \omega^4} F_0, \\ Y_2 &= \frac{\delta_{22} - m_1 \omega^2 \left(\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2 \right)}{1 - \left(\delta_{11} m_1 + \delta_{22} m_2 \right) \omega^2 + m_1 m_2 \left(\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2 \right) \omega^4} F_0. \end{aligned} \tag{3.99}$$

Numitorul este polinomul caracteristic, membrul stâng al ecuației (3.86).



a *b*

Fig. 3.21

Valorile absolute ale amplitudinilor Y_1 şi Y_2 sunt reprezentate grafic în funcție de pulsație în fig. 3.21. Când pulsația forțelor devine egală cu o pulsație proprie a sistemului, amplitudinile cresc nelimitat. Sistemul are două rezonanțe, marcate prin vârfuri infinite în curbele de răspuns în frecvență.

Antirezonanța apare când $Y_2 = 0$, la o pulsație dată de

$$\omega_a^2 = \frac{\delta_{22}}{m_1\left(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2\right)}. \qquad (3.100)$$

Dacă se cunosc amplitudinile deplasărilor răspunsului forțat, se pot calcula amplitudinile forțelor de inerție ce acționează asupra maselor, deci amplitudinile forțelor dinamice care acționează asupra barei (fig. 3.20, *b*) sunt

$$\Phi_1 = m_1\omega^2 Y_1, \quad \Phi_2 = m_2\omega^2 Y_2 + F_0. \qquad (3.101)$$

Se poate construi apoi diagrama momentelor încovoietoare dinamice (fig. 3.20, *c*), pe baza căreia se pot calcula tensiunile dinamice produse de forța armonică.

Exemplul 3.7

Bara cu greutate proprie neglijabilă din fig. 3.22, *a* are diametrul $d = 40\,\text{mm}$, $\ell = 1\,\text{m}$, $E = 210\,\text{GPa}$ şi $m = 50\,\text{kg}$. a) Să se calculeze pulsațiile proprii; b) Să se determine amplitudinile vibrațiilor forțate produse de o forță de amplitudine $F_0 = 20\,\text{N}$ şi frecvență $0{,}179\,\text{Hz}$; c) Să se traseze diagrama momentelor încovoietoare statice şi să se determine tensiunile statice maxime; d) Să se traseze diagrama momentelor încovoietoare dinamice şi să se calculeze amplitudinea tensiunilor dinamice maxime.

Rezolvare. Coeficienții de flexibilitate sunt

$$\delta_{11} = \ell^3/6EI, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = -\ell^3/8EI, \quad \delta_{22} = 5\ell^3/24EI.$$

Notând

$$\lambda = \frac{24EI}{\omega^2 m\ell^3},$$

ecuația pulsațiilor proprii este

$$\begin{vmatrix} \lambda - 8 & 3 \\ 6 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0, \qquad \lambda^2 - 13\lambda + 22 = 0,$$

cu rădăcinile

$$\lambda_1 = 11, \qquad \lambda_2 = 2.$$

Pulsațiile proprii sunt

$$\omega_1 = 1{,}477\sqrt{EI/m\ell^3} = 1{,}073\ \text{rad/s},$$

$$\omega_2 = 3{,}464\sqrt{EI/m\ell^3} = 2{,}516 \text{ rad/s}.$$

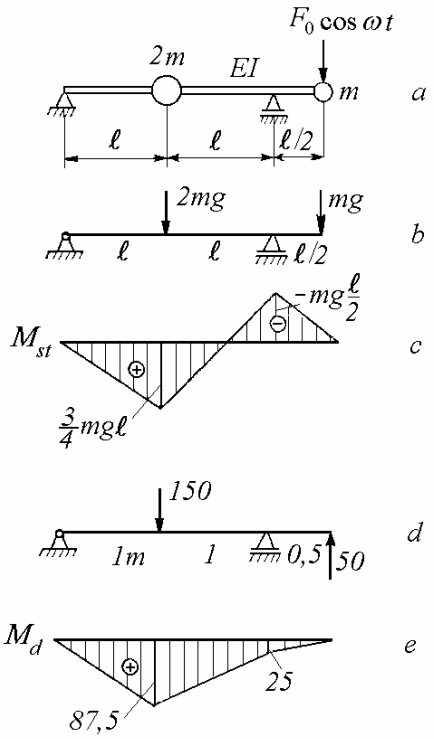


Fig. 3.22

Pentru datele numerice ale problemei, pulsaţia excitatoare corespunde unei valori $\lambda = 10$. Din relaţiile (3.99) se obţin amplitudinile deplasărilor

$$Y_1 = -\frac{3\lambda}{(\lambda-11)(\lambda-2)}\frac{F_0}{m\omega^2} = 0{,}118\,\text{mm},$$

$$Y_2 = -\frac{22-5\lambda}{(\lambda-11)(\lambda-2)}\frac{F_0}{m\omega^2} = -1{,}105\,\text{mm}.$$

Pentru încărcarea statică din fig. 3.22, *b*, diagrama momentelor încovoietoare statice este prezentată în fig. 3.22, *c*. Momentul încovoietor maxim este 368 Nm iar tensiunea statică maximă este $\sigma_{st} = 58{,}5\,\text{N/mm}^2$.

Amplitudinile (3.101) ale forţelor dinamice sunt

$$\Phi_1 = 2m\omega^2 Y_1 = -\frac{6\lambda}{(\lambda-11)(\lambda-2)} F_0 = 150\,\text{N},$$

$$\Phi_2 = m\omega^2 Y_2 + F_0 = \left[1 - \frac{22-5\lambda}{(\lambda-11)(\lambda-2)}\right] F_0 = -50\,\text{N}.$$

Pentru încărcarea dinamică din fig. 3.22, *d*, diagrama momentelor încovoietoare dinamice este prezentată în fig. 3.22, *e*. Momentul încovoietor maxim este 87,5 Nm iar tensiunile dinamice maxime sunt $\sigma_d = 14\,\text{N}/\text{mm}^2$.

3.4 Vibrații cuplate de translație şi rotație

Când rezultanta forţelor care acționează asupra unui corp rigid rezemat elastic nu trece prin centrul său de greutate, modurile de vibrație de translație şi de rotație sunt cuplate. Astfel de cuplaje apar la vibrațiile automobilului pe suspensii, ale motorului automobilului pe flexiblocuri, ale rotoarelor rezemate în două lagăre, ale maselor în consolă la absorbitoarele dinamice de tip Stockbridge de la liniile de înaltă tensiune şi în general la bare în consolă cu discuri în capăt.

3.4.1 Ecuațiile de mişcare

Corpul rigid din fig. 3.23, *a* are masa *m* şi momentul de inerție masic față de centrul de greutate *J,* fiind rezemat la capete pe arcuri cu rigiditățile k_1, respectiv k_2. Se poate considera că punctele rigidului se deplasează numai pe verticală. Mişcarea acestuia este complet definită de două coordonate: $x-$ deplasarea liniară a centrului de greutate *G*, şi θ − unghiul de rotație față de *G*.

Utilizând diagrama forțelor din fig. 3.23, *b*, ecuațiile de mişcare se pot scrie

$$\begin{aligned} &m\ddot{x} + k_1(x - \ell_1\theta) + k_2(x + \ell_2\theta) = 0, \\ &J\ddot{\theta} - k_1(x - \ell_1\theta)\,\ell_1 + k_2(x + \ell_2\theta)\,\ell_2 = 0 \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} &m\ddot{x} + (k_1 + k_2)\,x + (k_2\ell_2 - k_1\ell_1)\,\theta = 0, \\ &J\ddot{\theta} + (k_2\ell_2 - k_1\ell_1)\,x + (k_1\ell_1^2 + k_2\ell_2^2)\,\theta = 0. \end{aligned} \qquad (3.102)$$

În formă matricială

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2\ell_2 - k_1\ell_1 \\ k_2\ell_2 - k_1\ell_1 & k_1\ell_1^2 + k_2\ell_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \qquad (3.102,\ a)$$

Dacă $k_1\ell_1 = k_2\ell_2$ mişcările sistemului se decuplează. Sistemul are două pulsaţii proprii independente – una pentru translaţie pură şi una pentru rotaţie pură

$$\omega_x = \sqrt{(k_1 + k_2)/m} \quad \text{şi} \quad \omega_\theta = \sqrt{\left(k_1\ell_1^2 + k_2\ell_2^2\right)/J}\,. \qquad (3.103)$$

Pentru cuplaj zero, o forţă aplicată în centrul de greutate produce doar translaţie verticală *x*, în timp ce un cuplu aplicat rigidului produce doar o rotaţie θ. Cuplajul este produs de elementele nediagonale ale matricii de rigiditate, motiv pentru care este denumit *cuplaj static*.

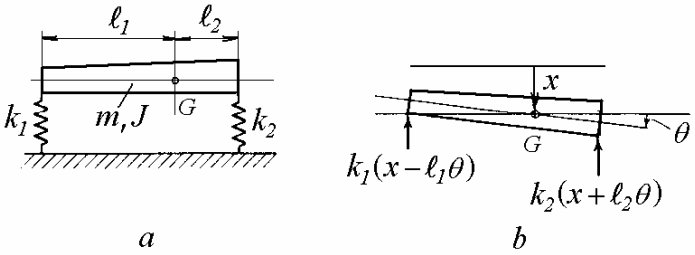


Fig. 3.23

Mişcarea rigidului mai poate fi definită şi de alte două coordonate, deplasările liniare ale extremităţilor (punctele de ataşare a arcurilor) x_1 şi x_2. Transformarea între cele două seturi de coordonate este definită de relaţia

$$\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{1}{\ell_1 + \ell_2}\begin{bmatrix} \ell_2 & \ell_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}. \qquad (3.104)$$

Înlocuind (3.104) în ecuaţia (3.102, *a*) şi înmulţind la stânga cu transpusa matricii de transformare din (3.104) se obţin următoarele ecuaţii de mişcare

$$\begin{bmatrix} m\ell_2^2 + J & m\ell_1\ell_2 - J \\ m\ell_1\ell_2 - J & m\ell_1^2 + J \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1(\ell_1 + \ell_2) & 0 \\ 0 & k_2(\ell_1 + \ell_2) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \qquad (3.105)$$

Cuplajul este produs de elementele nediagonale ale matricii de masă, motiv pentru care este numit *cuplaj dinamic*.

Dacă $J = m\ell_1\ell_2$ mişcarea combinată de translaţie şi rotaţie poate fi exprimată ca o sumă de vibraţii unghiulare, una faţă de capătul din dreapta al rigidului, cealaltă faţă de capătul din stânga al acestuia.

4.4.2 Modurile proprii de vibrație

Dacă se notează

$$a=\left(k_1+k_2\right)/m\,,\ b=\left(k_2\ell_2-k_1\ell_1\right)/m\,,\ c=\left(k_1\ell_1^2+k_2\ell_2^2\right)/J\,,$$

ecuațiile (3.102) devin

$$\begin{aligned}&\ddot{x}+a\,x+b\theta=0,\\&r^2\ddot{\theta}+b\,x+c\,r^2\theta=0,\end{aligned}\tag{3.106}$$

unde $r=\sqrt{J/m}$ este raza de girație a corpului rigid.

Admițând soluții de forma

$$x\left(t\right)=A_x\cos\left(\omega\,t-\varphi\right),\quad \theta\left(t\right)=A_\theta\cos\left(\omega\,t-\varphi\right),\tag{3.107}$$

se obține sistemul de ecuații algebrice

$$\begin{aligned}&\left(a-\omega^2\right)A_x+b\,A_\theta=0\,,\\&b\,A_x+\left(c-\omega^2\right)r^2A_\theta=0\,.\end{aligned}\tag{3.108}$$

Ecuațiile (3.108) admit soluții nebanale dacă determinantul coeficienților variabilelor A_x și A_θ este zero

$$\begin{vmatrix}a-\omega^2 & b\\ b & \left(c-\omega^2\right)r^2\end{vmatrix}=0\tag{3.109}$$

sau

$$\omega^4-\left(a+c\right)\omega^2+\left(a\,c-b^2/r^2\right)=0\,.\tag{3.109, *a*}$$

Rădăcinile ecuației pulsațiilor proprii (3.109, *a*) sunt

$$\omega_{1,2}^2=\left(a+c\right)/2\pm\sqrt{\left(a-c\right)^2/4+b^2/r^2}\,.\tag{3.110}$$

Prima pulsație proprie ω_1 este totdeauna mai mică decât ω_x și ω_θ, iar a doua pulsație proprie ω_2 este totdeauna mai mare decât ω_x și ω_θ.

Forma modurilor proprii se obține înlocuind pulsațiile proprii, pe rând, în raportul amplitudinilor

$$\begin{aligned}&\mu_1=\left(A_x/A_\theta\right)_1=-b/\left(a-\omega_1^2\right),\\&\mu_2=\left(A_x/A_\theta\right)_2=-b/\left(a-\omega_2^2\right).\end{aligned}\tag{3.111}$$

Exemplul 3.8

Să se determine modurile proprii de vibrație ale sistemului din fig. 3.23 dacă $\ell_1 = 3\ell/4$, $\ell_2 = \ell/4$, $k_1 = k_2 = k$ şi $J = m\ell^2/8$.

Rezolvare. Ecuațiile (3.108) au forma

$$\left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right) A_x + \frac{k\ell}{2m} A_\theta = 0,$$

$$\frac{k\ell}{2m} A_x + \left(\frac{5k}{m} - \omega^2\right) \frac{\ell^2}{8} A_\theta = 0.$$

Notând

$$\alpha = \frac{\omega^2 m}{k},$$

ecuațiile devin

$$(2-\alpha) A_x + \frac{\ell}{2} A_\theta = 0,$$

$$\frac{\ell}{2} A_x + (5-\alpha) \frac{\ell^2}{8} A_\theta = 0.$$

Ecuația pulsațiilor proprii este

$$\alpha^2 - 7\alpha + 8 = 0$$

având rădăcinile

$$\alpha_1 = 1{,}438, \qquad \alpha_2 = 5{,}561.$$

Pulsațiile proprii sunt

$$\omega_1 = 1{,}199\sqrt{k/m}, \qquad \omega_2 = 2{,}358\sqrt{k/m}.$$

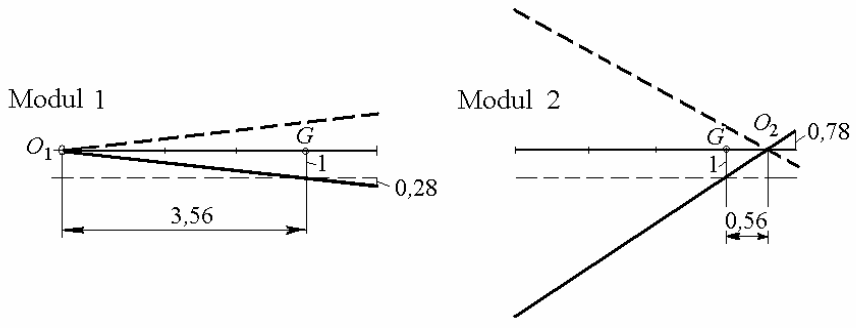


Fig. 3.24

Forma modurilor proprii (prezentată în fig. 3.24) este definită de

$$\left(\frac{A_\theta\,\ell/4}{A_x}\right)_1=\frac{2-\alpha_1}{2}=0{,}28\,,\qquad \left(\frac{A_\theta\,\ell/4}{A_x}\right)_2=\frac{2-\alpha_2}{2}=-1{,}78\,.$$

Inversele cu semn schimbat ale rapoartelor amplitudinilor definesc poziția punctelor nodale față de centrul de greutate, cu valori pozitive spre dreapta

$$d_1=-\left(\frac{A_x}{A_\theta\,\ell/4}\right)_1=-\frac{1}{0{,}28}=-3{,}56\,,\quad d_2=-\left(\frac{A_x}{A_\theta\,\ell/4}\right)_2=\frac{1}{1{,}78}=0{,}56\,.$$

Pulsațiile vibrațiilor decuplate de translație şi rotație sunt

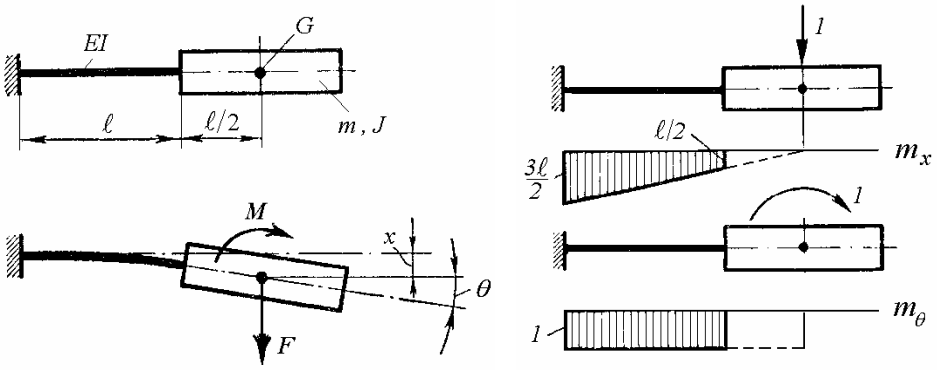
$$\omega_x=1{,}414\sqrt{k/m}\,,\qquad \omega_\theta=2{,}236\sqrt{k/m}\,.$$

În acest caz, se stabilesc următoarele inegalități

$$\omega_1<\omega_x<\omega_\theta<\omega_2\,.$$

Exemplul 3.9

Să se calculeze modurile proprii de vibrație ale sistemului din fig. 3.25, *a* compus dintr-un corp rigid lung, de masă *m* şi moment de inerție masic $J=m\ell^2/8$ atașat la capătul unei bare în consolă, cu modulul de rigiditate la încovoiere *EI*.



a *b*

Fig. 3.25

Rezolvare. Mişcarea corpului rigid este definită prin deplasarea liniară *x* a centrului de greutate *G*, şi prin unghiul de rotație θ față de *G*.

Ecuațiile de mişcare se pot scrie, aplicând principiul suprapunerii efectelor, sub forma relațiilor între forța de inerție $F = m\omega^2 x$, cuplul de inerție $M = J\omega^2\theta$ şi deplasările de translație x şi rotație θ

$$x = \delta_{11} F + \delta_{12} M,$$
$$\theta = \delta_{21} F + \delta_{22} M.$$

În fig. 3.25, *b* s-au construit două diagrame de momente încovoietoare, m_x – pentru încărcarea cu o forță egală cu 1 aplicată în punctul *G* pe direcția lui F, şi m_θ – pentru încărcarea cu un cuplu egal cu 1 aplicat în punctul *G* pe direcția lui M. Diagramele sunt folosite la calculul coeficienților de flexibilitate cu ajutorul metodei Mohr-Maxwell.

Deplasările pe direcțiile x şi θ se notează δ_{11} şi δ_{21}, respectiv δ_{12} şi δ_{22}. Coeficienții de flexibilitate sunt

$$\delta_{11} = 13\ell^3/12EI, \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \ell^2/EI, \qquad \delta_{22} = \ell/EI.$$

Înlocuind în ecuațiile de mişcare, rezultă

$$\beta x = 13x + \frac{3}{2}\ell\theta,$$
$$\beta\theta = \frac{12}{\ell}x + \frac{3}{2}\theta,$$

unde

$$\beta = 12EI/m\ell^3\omega^2.$$

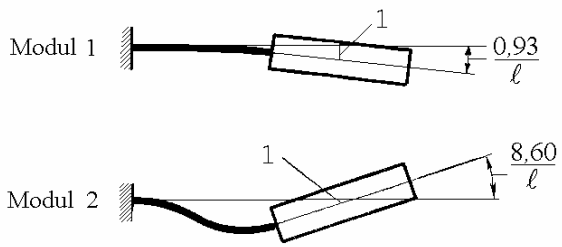


Fig. 3.26

Ecuația pulsațiilor proprii este

$$2\beta^2 - 29\beta + 3 = 0,$$

având rădăcinile $\beta_1 = 14{,}396$ şi $\beta_2 = 0{,}1042$.

Pulsațiile proprii sunt

$$\omega_1 = 0{,}913\sqrt{EI/m\ell^3}\,, \qquad \omega_2 = 10{,}73\sqrt{EI/m\ell^3}\,.$$

Forma modurilor proprii (fig. 4.26) este definită de

$$\left(\frac{A_\theta\,\ell}{A_x}\right)_1 = \frac{\beta_1 - 13}{3/2} = 0{,}930\,, \qquad \left(\frac{A_\theta\,\ell}{A_x}\right)_2 = \frac{\beta_2 - 13}{3/2} = -8{,}597\,.$$

3.5 Pendule cuplate elastic

Un fenomen interesant apare la vibrațiile libere ale pendulelor cuplate, când are loc un trasfer continuu al mişcării de la un pendul la celălalt datorită cuplajului slab printr-un element elastic de rigiditate relativ mică.

3.5.1 Ecuațiile de mişcare

Se consideră două pendule simple (fig. 3.27, *a*), de lungime ℓ şi masă *m* fiecare, oscilând în plan vertical. Pendulele sunt cuplate între ele cu ajutorul unui arc de rigiditate *k,* ataşat la o distanță *d* de punctele de suspendare a pendulelor. Arcul este netensionat când pendulele sunt în poziție verticală.

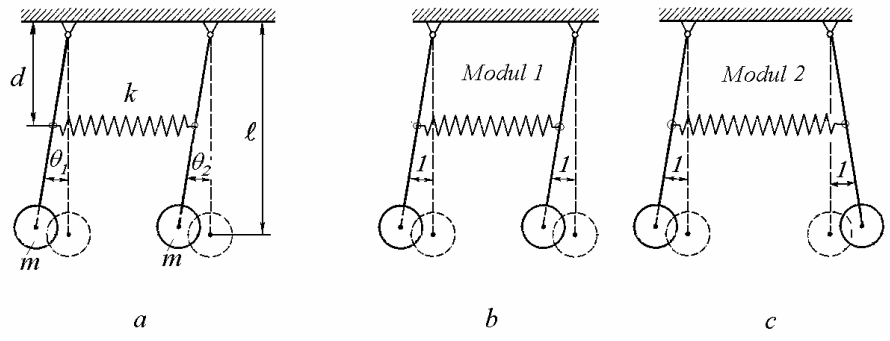


Fig. 3.27

Alegând drept coordonate unghiurile de înclinare ale pendulelor θ_1 şi θ_2 şi presupunând că sistemul efectuează oscilații de amplitudini mici, expresiile energiilor cinetică şi potențială sunt

$$T = \frac{1}{2}m\ell^2\left(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2\right), \tag{3.112}$$

$$U = mg\ell\left(1-\cos\theta_1\right)+mg\ell\left(1-\cos\theta_2\right)+\frac{1}{2}kd^2\left(\theta_2-\theta_1\right)^2,$$

sau

$$U=\frac{1}{2}mg\ell\left(\theta_1^2+\theta_2^2\right)+\frac{1}{2}kd^2\left(\theta_2-\theta_1\right)^2. \tag{3.113}$$

Utilizând ecuațiile lui Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial T}{\partial q_r}+\frac{\partial U}{\partial q_r}=0, \qquad r=1,2 \tag{3.114}$$

se obțin următoarele ecuații de mișcare

$$\begin{aligned} &m\ell^2\ddot{\theta}_1+mg\ell\theta_1+kd^2\left(\theta_1-\theta_2\right)=0,\\ &m\ell^2\ddot{\theta}_2+mg\ell\theta_2-kd^2\left(\theta_1-\theta_2\right)=0. \end{aligned} \tag{3.115}$$

În formă matricială, ecuațiile de mișcare se scriu sub forma

$$\begin{bmatrix} m\ell^2 & 0\\ 0 & m\ell^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} mg\ell+kd^2 & -kd^2\\ -kd^2 & mg\ell+kd^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}. \tag{3.115, a}$$

Cuplajul este produs de arcul k.

3.5.2 Modurile proprii de vibrație

Înlocuind soluții de forma

$$\theta_1=a_1\cos\left(\omega t-\varphi\right), \qquad \theta_2=a_2\cos\left(\omega t-\varphi\right)$$

în ecuațiile diferențiale (3.115), se obține sistemul algebric omogen

$$\begin{aligned} &\left(mg\ell-\omega^2m\ell^2+kd^2\right)a_1-kd^2a_2=0,\\ &-kd^2a_1+\left(mg\ell-\omega^2m\ell^2+kd^2\right)a_2=0. \end{aligned}$$

Ecuația pulsațiilor proprii este

$$\left(mg\ell-\omega^2m\ell^2+kd^2\right)^2-\left(kd^2\right)^2=0$$

sau

$$\omega^4-2\left(\frac{g}{\ell}+\frac{kd^2}{m\ell^2}\right)\omega^2+\left(\frac{g^2}{\ell^2}+2\frac{kd^2g}{m\ell^3}\right)=0.$$

Pulsațiile proprii sunt

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + 2\frac{kd^2}{m\ell^2}}\,. \tag{3.116}$$

Forma modurilor proprii este definită de rapoartele amplitudinilor

$$\mu_1 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)_1 = +1\,, \qquad \mu_2 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)_2 = -1\,. \tag{3.117}$$

În primul mod (fig. 3.27, *b*), pendulele oscilează în fază, cu amplitudini egale. Arcul de cuplaj nu este tensionat iar pendulele oscilează ca şi cum nu ar fi cuplate. Pulsația proprie a sistemului este egală cu cea a unui singur pendul $\sqrt{g/\ell}$. În modul al doilea (fig. 3.27, *c*), pendulele oscilează în antifază, cu amplitudini egale şi de sens opus. Datorită efectului rigidizant al arcului de cuplaj, pulsația proprie este mai mare decât în primul mod.

3.5.3 Vibrații libere

Soluția generală a vibrațiilor libere (3.14) este

$$\theta_1(t) = C_1 \cos\left(\omega_1 t - \varphi_1\right) u_{11} + C_2 \cos\left(\omega_2 t - \varphi_2\right) u_{12}\,,$$

$$\theta_2(t) = C_1 \cos\left(\omega_1 t - \varphi_1\right) u_{21} + C_2 \cos\left(\omega_2 t - \varphi_2\right) u_{22}\,,$$

sau

$$\theta_1(t) = a_1 \cos\left(\omega_1 t - \varphi_1\right) + a_2 \cos\left(\omega_2 t - \varphi_2\right)\,,$$

$$\theta_2(t) = \mu_1 a_1 \cos\left(\omega_1 t - \varphi_1\right) + \mu_2 a_2 \cos\left(\omega_2 t - \varphi_2\right)\,.$$

Derivând în raport cu timpul, rezultă

$$\dot{\theta}_1(t) = -\omega_1 a_1 \sin\left(\omega_1 t - \varphi_1\right) - \omega_2 a_2 \sin\left(\omega_2 t - \varphi_2\right)\,,$$

$$\dot{\theta}_2(t) = -\mu_1 \omega_1 a_1 \sin\left(\omega_1 t - \varphi_1\right) - \mu_2 \omega_2 a_2 \sin\left(\omega_2 t - \varphi_2\right)\,.$$

Constantele de integrare se determină din condițiile inițiale. Dacă este deplasat numai pendulul din stânga

$$\theta_1(0) = \theta_0\,, \quad \theta_2(0) = 0\,, \quad \dot{\theta}_1(0) = 0\,, \quad \dot{\theta}_2(0) = 0\,. \tag{3.118}$$

Deoarece $\mu_1 = 1$ şi $\mu_2 = -1$, se obține

$$a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2 = \theta_0\,, \qquad a_1 \cos\varphi_1 - a_2 \cos\varphi_2 = 0\,,$$

$$\omega_1 a_1 \sin\varphi_1 + \omega_2 a_2 \sin\varphi_2 = 0\,, \qquad \omega_1 a_1 \sin\varphi_1 - \omega_2 a_2 \sin\varphi_2 = 0\,,$$

astfel încât

$$\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = 0\,,\ \varphi_1 = \varphi_2 = 0\,,$$

$$2a_1\cos\varphi_1 = 2a_2\cos\varphi_2 = \theta_0\,,\quad a_1 = a_2 = \theta_0/2\,.$$

Valorile instantanee ale deplasărilor unghiulare sunt

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \frac{\theta_0}{2}\left(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right) = \theta_0\cos\omega_m t\cdot\cos\Delta\omega t,\\ \theta_2(t) &= \frac{\theta_0}{2}\left(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t\right) = \theta_0\sin\omega_m t\cdot\sin\Delta\omega t,\end{aligned} \tag{3.119}$$

unde

$$\omega_m = \left(\omega_1 + \omega_2\right)/2 \text{ şi } \Delta\omega = \left(\omega_2 - \omega_1\right)/2\,.$$

Când $\Delta\omega$ este mic în raport cu ω_m, produsele din relaţiile de mai sus reprezintă oscilaţii modulate în amplitudine, numite *bătăi*. Această condiţie este echivalentă cu

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 << \omega_1^2\,,\quad \frac{g}{\ell} + 2\frac{kd^2}{m\ell^2} - \frac{g}{\ell} << \frac{g}{\ell} \quad \text{sau} \quad k << \frac{gm\ell}{2d^2}\,,$$

deci bătăile pot apare doar pentru valori mici ale rigidităţii k a arcului de cuplaj.

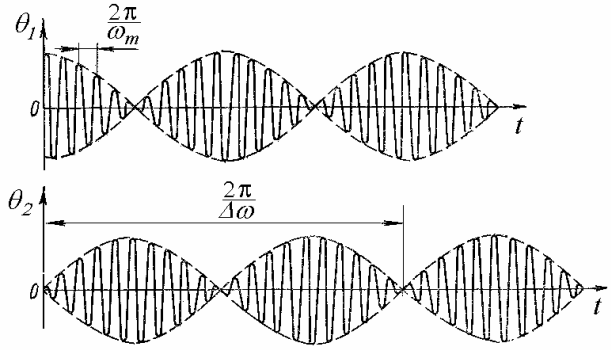


Fig. 3.28

Relaţiile (3.119) arată că θ_1 şi θ_2 sunt date de funcţii *sinus* şi *cosinus* care sunt defazate între ele cu 90^0. Când $\theta_1 = \theta_0$, atunci $\theta_2 = 0$ şi reciproc (fig.3.28).

Defazajul între cele două mişcări este

$$\varphi = \left(\omega_2 t - \varphi_2\right) - \left(\omega_1 t - \varphi_1\right) = \left(\omega_2 - \omega_1\right)t - \left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = 2\Delta\omega\, t - \Delta\varphi$$

având o variație lentă în timp.

La $t = 0$, unghiurile de înclinare au valorile $\theta_1 = \theta_0$, respectiv $\theta_2 = 0$.

La $\Delta\omega\, t = \pi/2$, înclinările sunt $\theta_1 = 0$ şi $\theta_2 = \theta_0 \sin\dfrac{\omega_m}{\Delta\omega}\dfrac{\pi}{2} = \theta_0$, dacă $\omega_m / \Delta\omega = n$ este număr întreg.

La $\Delta\omega\, t = \pi$, înclinările sunt $\theta_2 = 0$ şi $\theta_1 = \theta_0 \cos\dfrac{\omega_m}{\Delta\omega}\pi = -\theta_0$, dacă $\omega_m / \Delta\omega = n$ este număr întreg.

Prin condițiile inițiale (3.118) pendulul din stânga este menținut deplasat, în timp ce pendulul din dreapta este menținut vertical, apoi pendulele sunt eliberate (fig. 3.29, *a*).

La început pendulul din stânga va oscila, în timp ce pendulul din dreapta va sta aproape fix. Apoi pendulul din dreapta va oscila cu amplitudini tot mai mari, în timp ce amplitudinile oscilațiilor pendulului din stânga vor scădea. După un timp, pendulul din stânga va sta fix, în timp ce pendulul din dreapta va oscila cu amplitudinea maximă (fig. 3.29, *d*). Apoi fenomenul se repetă în ordine inversă. Are loc un transfer continuu de energie de la un pendul la celălalt până când amortizarea inerentă (neglijată în această analiză) aduce sistemul în repaus.

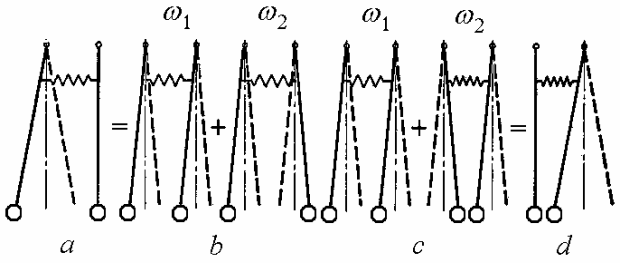


Fig. 3.29

Exprimată în funcție de modurile de vibrație componente, mişcarea poate fi privită ca suma a două mişcări armonice cu pulsațiile proprii ω_1 şi ω_2. Se consideră că inițial mişcarea în modul al doilea este astfel încât pendulele sunt îndepărtate unul de celălalt (fig. 3.29, *b*). Defazajul între moduri creşte în timp. Mişcarea în modul al doilea este mai rapidă decât în primul mod, până când este defazată 180^0 înaintea primului mod (fig. 3.29, *c*). Mişcarea în modul al doilea este astfel încât pendulele se apropie unul de celălat. Însumând mişcările, se ajunge la situația când pendulul din stânga stă nemişcat, în timp ce pendulul din dreapta oscilează cu amplitudine maximă. În timp, amplitudinea va creşte la pendulul din stânga şi întreaga secvență se repetă.

3.6 Sisteme amortizate

În paragrafele precedente s-au studiat doar sisteme neamortizate. În continuare se introduce efectul amortizării vâscoase. În general, amortizarea produce cuplarea coordonatelor. Pentru simplificare, se va considera cazul special al amortizării proporționale. Valori relativ mici ale amortizării limitează amplitudinea vibrațiilor la rezonanță. Valori mai mari pot face ca unele moduri să fie amortizate supracritic iar mişcarea corespunzătoare să fie aperiodică.

3.6.1 Amortizarea vâscoasă proporțională

Se consideră sistemul din fig. 3.30, *a*. Disiparea energiei este convenabil modelată prin amortizarea vâscoasă, reprezentată prin amortizoarele c_1 şi c_2. Forțele de amortizare vâscoasă sunt proporționale şi de semn contrar cu viteza relativă a capetelor amortizoarelor (fig. 3.30, *b*). Ecuațiile de mişcare se scriu însumând forțele care acționează asupra fiecărei mase:

$$\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1 + k_1 x_1 + c_1\dot{x}_1 + k_2\left(x_1 - x_2\right) + c_2\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right) = 0, \\ &m_2\ddot{x}_2 - k_2\left(x_1 - x_2\right) - c_2\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right) = 0, \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1 + \left(c_1 + c_2\right)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + \left(k_1 + k_2\right)x_1 - k_2 x_2 = 0, \\ &m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.120}$$

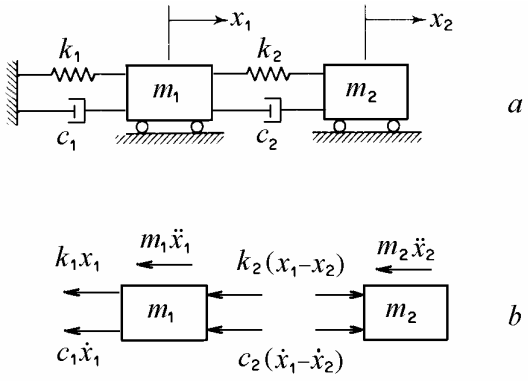


Fig. 3.30

Cuplajul între cele două coordonate este produs de rigiditatea k_2 şi de coeficientul de amortizare c_2.

În formă matricială, cele două ecuații se scriu

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.121)$$

sau, în formă compactă,

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\}, \quad (3.121, a)$$

unde $[c]$ este *matricea de amortizare*, iar $\{\dot{x}\}$ este *vectorul vitezelor.*

Matricea de amortizare este simetrică, deci

$$[c]=[c]^{\mathrm{T}}.$$

Matricea maselor este diagonală. Cuplajul este produs de elementele nediagonale ale matricilor de rigiditate şi de amortizare.

Ecuațiile (3.121) pot fi rezolvate cu ajutorul *analizei modale* dacă transformarea liniară bazată pe matricea modală diagonalizează matricea de amortizare simultan cu matricile de masă şi de rigiditate. Aceasta se obține simplu dacă matricea de amortizare poate fi exprimată ca o combinație liniară a matricilor de masă şi de rigiditate, deci dacă

$$[c]=\alpha[m]+\beta[k], \quad (3.122)$$

unde α şi β sunt constante. Această formă de amortizare se numeşte *amortizare proporțională* sau *amortizare de tip Rayleigh*. Există şi alte condiții în care matricea amortizării modale devine diagonală, dar acestea sunt cazuri speciale care se întâlnesc mai rar.

3.6.2 Vibrații libere amortizate

Dacă se rezolvă problema neamortizată (3.3), se obțin modurile proprii neamortizate de vibrații. Matricea modală (3.24) se construieşte cu vectorii modurilor normale pe coloane. Utilizând transformarea de coordonate

$$\{x\}=[u]\{q\} \quad (3.123)$$

şi înmulțind la stânga cu $[u]^{\mathrm{T}}$ rezultă

$$[M]\{\ddot{q}\}+[C]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{0\}, \quad (3.124)$$

unde

$$[M]=[u]^{\mathrm{T}}[m][u], \quad [C]=[u]^{\mathrm{T}}[c][u], \quad [K]=[u]^{\mathrm{T}}[k][u]. \quad (3.125)$$

Matricile modale $[M]$ şi $[K]$ sunt diagonale, în timp ce matricea $[C]$ este diagonală doar în cazul amortizării proporționale, când

$$[C]=\alpha[M]+\beta[K]\,. \tag{3.126}$$

În acest caz, se stabilesc următoarele relații de ortogonalitate

$$\{u\}_s^{\mathrm{T}}[c]\{u\}_r=0\,,\qquad r\neq s,\quad r,s=1,2 \tag{3.127}$$

Cu amortizare proporțională, ecuațiile modale decuplate sunt de forma

$$M_r\,\ddot{q}_r+C_r\,\dot{q}_r+K_r\,q_r=0\,,\qquad r=1,2 \tag{3.128}$$

unde M_r şi K_r sunt definiți de (3.26) şi (3.28), iar

$$C_r=\{u\}_r^{\mathrm{T}}[c]\{u\}_r\,,\qquad r=1,2 \tag{3.129}$$

sunt coeficienții de *amortizare modală*.

Pentru mase modale egale cu 1, rigiditățile modale sunt egale cu pătratul pulsației proprii respective şi coeficienții de amortizare modală se pot scrie sub forma $2\zeta_r\,\omega_r$, unde ω_r este pulsația proprie şi ζ_r este *raportul de amortizare modală* ale modului *r*.

Ecuațiile (3.128) devin

$$\ddot{q}_r+2\zeta_r\,\omega_r\,\dot{q}_r+\omega_r^2\,q_r=0\,,\qquad r=1,2 \tag{3.130}$$

şi pentru $0<\zeta_r<1$ au soluții de forma (2.46)

$$q_r(t)=A_r\,e^{-\zeta_r\,\omega_r\,t}\sin\left(\sqrt{1-\zeta_r^2}\,\omega_r t+\phi_r\right).\quad r=1,2 \tag{3.131}$$

Soluțiile (3.131) se pot obține şi direct. Căutând soluții de forma $x_r=a_r\mathrm{e}^{st}$, ecuațiile (3.121) devin

$$\begin{aligned}
&m_1 s^2 a_1+(c_1+c_2)s\,a_1-c_2\,s\,a_2+(k_1+k_2)a_1-k_2\,a_2=0,\\
&m_2 s^2 a_2-c_2\,s\,a_1+c_2\,s\,a_2-k_2\,a_1+k_2\,a_2=0,
\end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned}
&\left[m_1 s^2+(c_1+c_2)s+(k_1+k_2)\right]a_1-(c_2 s+k_2)a_2=0,\\
&-(c_2 s+k_2)\,a_1+\left(m_2 s^2+c_2 s+k_2\right)a_2=0.
\end{aligned} \tag{3.132}$$

Condiția de a avea soluții nebanale conduce la ecuația caracteristică

$$\left[m_1 s^2+(c_1+c_2)s+(k_1+k_2)\right]\left(m_2 s^2+c_2 s+k_2\right)-(c_2 s+k_2)^2=0\,. \tag{3.133}$$

La sisteme amortizate subcritic, ecuația (3.133) are două perechi de rădăcini complexe conjugate, de forma

$$s_{1,2} = -\sigma_1 \pm \mathrm{i}\omega_{d1}, \qquad s_{3,4} = -\sigma_2 \pm \mathrm{i}\omega_{d2}, \tag{3.134}$$

unde ω_{d1} şi ω_{d2} sunt *pulsaţiile proprii amortizate* iar σ_1 şi σ_2 sunt *factori de amortizare* (*constante de atenuare*).

Între parametrii de mai sus şi *valorile absolute ale pulsaţiilor proprii* (egale cu *pulsaţiile proprii neamortizate* ale sistemelor cu amortizare proporţională) şi *rapoartele de amortizare* se stabilesc următoarele relaţii:

$$\sigma_r = \zeta_r\, \omega_r, \qquad \omega_{dr} = \omega_r \sqrt{1-\zeta_r^2} \qquad r = 1,2 \tag{3.135, a}$$

$$\zeta_r = \frac{\sigma_r}{\sqrt{\omega_{dr}^2 + \sigma_r^2}}, \qquad \omega_r = \frac{\sigma_r}{\zeta_r} = \sqrt{\omega_{dr}^2 + \sigma_r^2}\,. \qquad r = 1,2 \tag{3.135, b}$$

Cu aceste notaţii, expresia (3.131) devine

$$q_r(t) = A_r\, e^{-\sigma_r t} \sin\left(\omega_{dr} t + \phi_r\right). \qquad r = 1,2 \tag{3.131, a}$$

Pentru valori relativ mari ale amortizării, ecuaţia (3.133) poate avea fie două rădăcini reale şi două rădăcini complexe conjugate, când unul din modurile de vibraţie este amortizat supracritic, fie două perechi de rădăcini reale, când ambele moduri sunt amortizate supracritic şi sistemul are mişcare aperiodică. Studiul acestor cazuri nu face obiectul acestei lucrări.

Înlocuind soluţiile (3.134) în (3.132), se obţin rapoartele amplitudinilor $\left(a_2/a_1\right)_r$ care, dacă amortizarea este proporţională, definesc *moduri reale* de vibraţie. Analiza de mai sus se referă la sisteme cu pulsaţii proprii distincte. Cazul pulsaţiilor proprii egale este tratat în alte lucrări.

Exemplul 3.10

Să se calculeze modurile de vibraţie ale sistemului din fig. 3.30, luând pentru simplificare $m_1 = 2$, $k_1 = 2$, $c_1 = 1$, $m_2 = 1$, $k_2 = 1$, $c_2 = 0{,}5$, în unităţi adecvate.

Rezolvare. Ecuaţiile vibraţiilor proprii (3.121) sunt

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Se observă că

$$[c] = 0{,}5[k]\,.$$

Ecuaţiile (3.132) devin

$$\left(2\,s^2+1{,}5\,s+3\right)a_1-\left(0{,}5\,s+1\right)a_2=0,$$
$$-\left(0{,}5\,s+1\right)a_1+\left(s^2+0{,}5\,s+1\right)a_2=0.$$

Ecuația caracteristică este

$$\left(2\,s^2+1{,}5\,s+3\right)\left(s^2+0{,}5\,s+1\right)-\left(0{,}5\,s+1\right)^2=0\,,$$

sau

$$2\,s^4+2{,}5\,s^3+5{,}5\,s^2+2\,s+2=0\,,$$

cu rădăcinile

$$s_{1,2}=-\frac{1}{8}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{31}}{8}\,,\qquad s_{3,4}=-\frac{1}{2}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{7}}{2}\,.$$

Părțile imaginare sunt pulsațiile proprii amortizate

$$\omega_{d1}=\sqrt{31}/8=0{,}6960\,,\quad \omega_{d2}=\sqrt{7}/2=1{,}3229\,.$$

Părțile reale sunt factorii de amortizare (constantele de atenuare)

$$\sigma_1=0{,}125\,,\qquad \sigma_2=0{,}5\,.$$

Pulsațiile proprii neamortizate sunt egale cu modulele valorilor proprii

$$\omega_1=\sqrt{\omega_{d1}^2+\sigma_1^2}=\sqrt{\left(\sqrt{31}/8\right)^2+\left(1/8\right)^2}=1/\sqrt{2}\,,$$
$$\omega_2=\sqrt{\omega_{d2}^2+\sigma_2^2}=\sqrt{\left(\sqrt{7}/2\right)^2+\left(1/2\right)^2}=\sqrt{2}\,.$$

Rapoartele de amortizare modale sunt

$$\zeta_1=\frac{\sigma_1}{\omega_1}=\frac{1/8}{1/\sqrt{2}}=0{,}176\,,\quad \zeta_2=\frac{\sigma_2}{\omega_2}=\frac{1/2}{\sqrt{2}}=0{,}353\,.$$

Raportul amplitudinilor

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{2\,s^2+1{,}5\,s+3}{0{,}5\,s+1}=\frac{0{,}5\,s+1}{s^2+0{,}5\,s+1}$$

are următoarele valori pentru cele două moduri

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)_1=2\,,\qquad \left(\frac{a_2}{a_1}\right)_2=-1\,.$$

Prin rezolvarea problemei neamortizate în Exemplul 3.1, s-au obținut aceleaşi pulsații proprii neamortizate şi forme ale modurilor reale de vibrație.

Exemplul 3.11

Să se calculeze parametrii modali ai sistemului din fig. 3.30 pentru aceleaşi valori ale maselor şi rigidităţilor, dar cu amortizare mai mică $[c]=0{,}1[k]$.

Rezolvare. Ecuaţiile (3.132) devin

$$\left(2s^2+0{,}3s+3\right)a_1-\left(0{,}1s+1\right)a_2=0,$$
$$-\left(0{,}1s+1\right)a_1+\left(s^2+0{,}1s+1\right)a_2=0.$$

Ecuaţia caracteristică

$$2s^4+0{,}5s^3+5{,}02s^2+0{,}4s+2=0,$$

are rădăcinile

$$s_{1,2}=-\frac{1}{40}\pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{799}}{40},\quad s_{3,4}=-\frac{1}{10}\pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{199}}{10}$$

sau

$$s_{1,2}=-0{,}025\pm \mathrm{i}\ 0{,}70666,\ s_{3,4}=-0{,}1\pm \mathrm{i}\ 1{,}41067.$$

Pulsaţiile proprii amortizate sunt

$$\omega_{d1}=0{,}70666,\quad \omega_{d2}=1{,}4107.$$

Factorii de amortizare au valorile

$$\sigma_1=0{,}025,\qquad \sigma_2=0{,}1.$$

Rapoartele de amortizare modale sunt

$$\zeta_1=0{,}0353,\quad \zeta_2=0{,}0707.$$

Pulsaţiile proprii neamortizate şi formele modale sunt aceleaşi ca în Exemplul 3.10.

3.6.3 Răspunsul la excitaţie armonică

Se consideră vibraţiile sistemului cu două grade de libertate din fig. 3.31 sub acţiunea forţelor $f_1(t)$ şi $f_2(t)$.

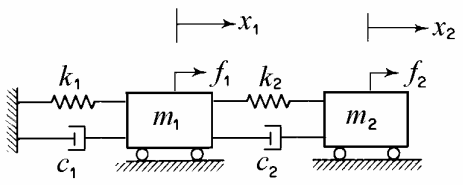


Fig. 3.31

Ecuaţiile de mişcare sunt

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (c_1+c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1+k_2)x_1 - k_2 x_2 &= f_1(t), \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 &= f_2(t), \end{aligned} \tag{3.136}$$

sau în formă matricială compactă

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}. \tag{3.136, a}$$

3.6.3.1 Funcţiile de transfer

Aplicând transformata Laplace ecuaţiei (3.136, *a*) şi presupunând toate condiţiile iniţiale nule se obţine

$$\left[[m]s^2+[c]s+[k]\right]\{X(s)\}=\{F(s)\} \tag{3.137}$$

sau

$$[B(s)]\{X(s)\}=\{F(s)\}, \tag{3.138}$$

unde $[B(s)]$ este *matricea sistemului*.

Înmulţind la stânga cu $[B(s)]^{-1}=[H(s)]$ rezultă

$$[H(s)]\{F(s)\}=\{X(s)\} \tag{3.139}$$

unde $[H(s)]$ este *matricea funcţiilor de transfer*. Aceasta este inversa matricii sistemului.

Pentru sistemul din fig. 3.31 această matrice are forma

$$[H(s)]=\frac{\begin{bmatrix} m_2 s^2+c_2 s+k_2 & c_2 s+k_2 \\ c_2 s+k_2 & m_1 s^2+(c_1+c_2)s+k_1+k_2 \end{bmatrix}}{\left[m_1 s^2+(c_1+c_2)s+k_1+k_2\right]\left[m_2 s^2+c_2 s+k_2\right]-(c_2 s+k_2)^2} \tag{3.140}$$

Numitorul expresiei (3.140) este $\det[B(s)]$, polinomul caracteristic al sistemului. Acesta poate fi scris sub formă de produs

$$\det[B(s)]=A(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4),$$

unde A este o constantă şi $s_1,..,s_4$ sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice (3.133). Deoarece coeficienţii ecuaţiei caracteristice sunt reali, pentru valori relativ mici ale amortizării rădăcinile sunt complexe conjugate. Ele se numesc *polii* funcţiei de transfer.

Relaţia (3.139) mai poate fi scrisă sub forma

$$\begin{bmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{Bmatrix}. \tag{3.141}$$

unde $h_{\ell j}(s)$ poate fi determinată excitând sistemul în punctul *j* şi măsurând răspunsul în punctul ℓ. De exemplu, $h_{11}(s)$ este o *funcție de transfer directă* (*în punctul de excitație*) obținută excitând sistemul cu $F_1(s)$ şi măsurând răspunsul $X_1(s)$

$$h_{11}(s) = \frac{X_1(s)}{F_1(s)} = \frac{m_2 s^2 + c_2 s + k_2}{A(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)}. \tag{3.142}$$

3.6.3.2 Funcțiile de răspuns în frecvență

O *funcție de răspuns în frecvență* (FRF) este funcția de transfer evaluată pe axa pulsațiilor $\mathrm{i}\omega$. Înlocuind $s = \mathrm{i}\omega$ în (3.141) rezultă

$$\begin{bmatrix} h_{11}(\mathrm{i}\omega) & h_{12}(\mathrm{i}\omega) \\ h_{21}(\mathrm{i}\omega) & h_{22}(\mathrm{i}\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \end{Bmatrix}$$

sau

$$\left[H(\mathrm{i}\omega)\right]\{F(\omega)\} = \{X(\omega)\}, \tag{3.143}$$

unde $\left[H(\mathrm{i}\omega)\right]$ este *matricea funcțiilor de răspuns în frecvență* iar $X_j(\omega)$, $F_j(\omega)$ sunt transformatele Fourier ale răspunsului, respectiv excitației.

Răspunsul sistemului poate fi definit în *domeniul frecvențelor* prin sume de produse între funcțiile de răspuns în frecvență măsurate experimental şi transformatele excitației

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= h_{11}(\mathrm{i}\omega) F_1(\omega) + h_{12}(\mathrm{i}\omega) F_2(\omega), \\ X_2(\omega) &= h_{21}(\mathrm{i}\omega) F_1(\omega) + h_{22}(\mathrm{i}\omega) F_2(\omega). \end{aligned} \tag{3.143, a}$$

Răspunsul forțat al sistemului în *domeniul timpului*, $x_1(t)$ şi $x_2(t)$, poate fi determinat apoi calculând transformatele Fourier inverse ale răspunsului, $X_1(\omega)$ şi $X_2(\omega)$.

Exemplul 3.12

Să se calculeze matricea funcțiilor de răspuns în frecvență pentru sistemul cu două grade de libertate din Exemplul 3.11 şi să se traseze curbele FRF $h_{11}(\mathrm{i}\omega)$.

Rezolvare. Înlocuind $s = \mathrm{i}\omega$, matricea FRF (3.140) devine

$$\left[H(\mathrm{i}\omega)\right] = \frac{\begin{bmatrix} 1-\omega^2+\mathrm{i}\,0{,}1\omega & 1+\mathrm{i}\,0{,}1\omega \\ 1+\mathrm{i}\,0{,}1\omega & 3-2\omega^2+\mathrm{i}\,0{,}3\omega \end{bmatrix}}{2\omega^4-5{,}02\,\omega^2+2+\mathrm{i}\left(-0{,}5\,\omega^3+0{,}4\,\omega\right)}.$$

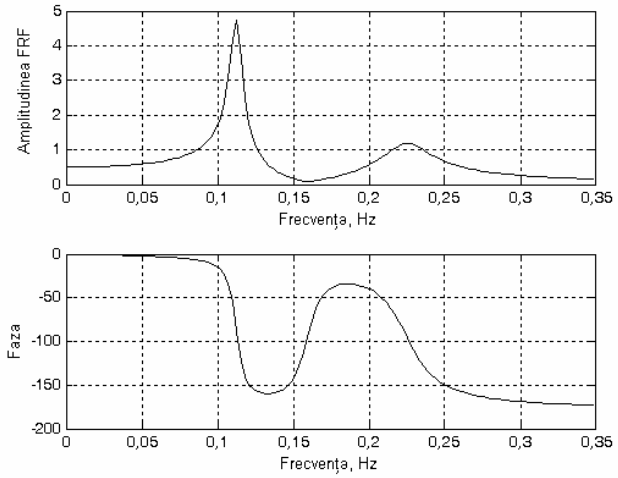


Fig. 3.32

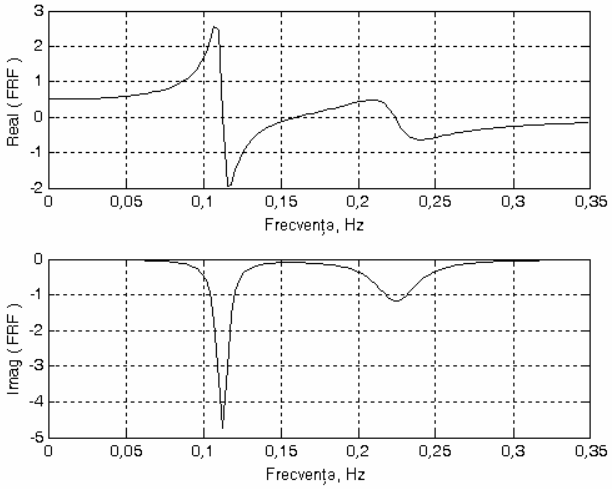


Fig. 3.33

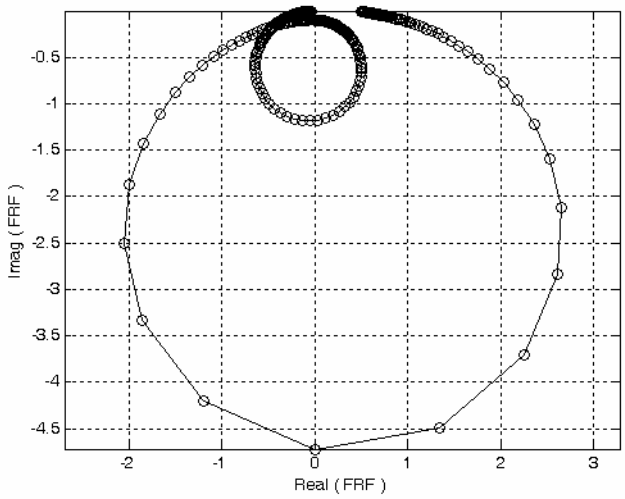


Fig. 3.34

Diagramele amplitudinii şi unghiului de fază al FRF sunt prezentate în fig. 3.32. Diagrama amplitudinii are două vârfuri de rezonanță. Datorită amortizării mai mari în modul al doilea, vârful respectiv de rezonanță are amplitudine mai mică. La rezonanțe, unghiul de fază este aproximativ -90^0. Diagramele componentelor reală şi imaginară sunt prezentate în fig. 3.33. Diagrama Nyquist este dată în fig. 3.34 cu puncte marcate la intervale egale de frecvență.

3.6.3.3 Rezolvare prin analiza modală

Utilizând transformarea de coordonate (3.123) $\{x\}=[u]\{q\}$ şi înmulțind la stânga cu $[u]^{\mathrm{T}}$, ecuațiile (4.136, *a*) devin

$$[M]\{\ddot{q}\}+[C]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=[u]^{\mathrm{T}}\{f\}=\{F\}. \qquad (3.144)$$

Cu amortizare proporțională, ecuațiile modale decuplate au forma

$$M_r\,\ddot{q}_r + C_r\,\dot{q}_r + K_r\,q_r = F_r\,, \qquad r=1,2 \qquad (3.145)$$

sau

$$\ddot{q}_r + 2\zeta_r\omega_r\,\dot{q}_r + \omega_r^2\,q_r = F_r/M_r\,. \qquad r=1,2 \qquad (3.146)$$

În cazul excitației şi răspunsului armonic, se notează

$$\{f\}=\left\{\hat{f}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,,\ \{x\}=\{\tilde{x}\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,, \qquad (3.147)$$

$$\{F\}=\{\hat{F}\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\quad \{q\}=\{\tilde{q}\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{3.148}$$

deci transformarea (3.123) se scrie

$$\{\tilde{x}\}=[u]\{\tilde{q}\}=\sum_{r=1}^{2}\tilde{q}_r\{u\}_r, \tag{3.149}$$

unde o "căciulă" deasupra literei denotă amplitudinea reală iar o tildă deasupra literei denotă amplitudinea complexă.

Înlocuind (3.148) în ecuațiile (3.145) şi (3.146) rezultă

$$\tilde{q}_r=\frac{\{u\}_r^{\mathrm{T}}\{\hat{f}\}}{K_r-\omega^2M_r+\mathrm{i}\,\omega\,C_r}=\frac{\{u\}_r^{\mathrm{T}}\{\hat{f}\}}{M_r\left(\omega_r^2-\omega^2+\mathrm{i}\,2\zeta_r\omega\omega_r\right)}. \tag{3.150}$$

Normalizând vectorii modali astfel încât masele modale să fie egale cu unitatea, $M_r=1$, înlocuind (3.150) în (3.149) se obține

$$\{\tilde{x}\}=\sum_{r=1}^{2}\frac{\{u\}_r^{\mathrm{T}}\{\hat{f}\}\{u\}_r}{\omega_r^2-\omega^2+\mathrm{i}\,2\zeta_r\omega\,\omega_r}$$

sau

$$\begin{Bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{Bmatrix}=\sum_{r=1}^{2}\frac{\{u\}_r\{u\}_r^{\mathrm{T}}}{\omega_r^2-\omega^2+\mathrm{i}\,2\zeta_r\omega\,\omega_r}\begin{Bmatrix}\hat{f}_1\\ \hat{f}_2\end{Bmatrix}. \tag{3.151}$$

De observat că produsul diadic $\{u\}_r\{u\}_r^{\mathrm{T}}$ este o matrice pătrată 2 x 2.

Matricea FRF (3.143) poate fi exprimată în funcție de parametrii modali

$$[H(\mathrm{i}\omega)]=\frac{\{u\}_1\{u\}_1^{\mathrm{T}}}{\omega_1^2-\omega^2+\mathrm{i}\,2\zeta_1\omega\omega_1}+\frac{\{u\}_2\{u\}_2^{\mathrm{T}}}{\omega_2^2-\omega^2+\mathrm{i}\,2\zeta_2\omega\omega_2}. \tag{3.152}$$

Dacă elementul *j* al vectorului modal *r* se notează $(u_r)_j$, atunci funcția de răspuns în frecvență $h_{j\ell}(\mathrm{i}\omega)$ poate fi exprimată ca sumă de fracții parțiale

$$h_{j\ell}(\mathrm{i}\omega)=\frac{(u_1)_j(u_1)_\ell}{\omega_1^2-\omega^2+\mathrm{i}\,2\zeta_1\omega\omega_1}+\frac{(u_2)_j(u_2)_\ell}{\omega_2^2-\omega^2+\mathrm{i}\,2\zeta_2\omega\omega_2}. \tag{3.153}$$

Această expresie arată explicit contribuția separată a fiecărui mod de vibrație la răspunsul sistemului la o anumită pulsație.

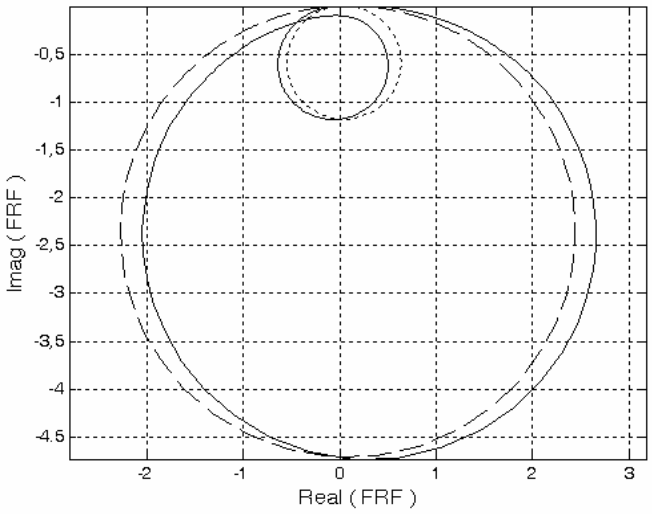


Fig. 3.35

Exemplul 3.13

Să se calculeze dezvoltarea în fracții parțiale a matricii FRF a sistemului cu două grade de libertate din Exemplul 3.12.

Rezolvare. Vectorii modali, normalizați cu mase modale egale cu 1, sunt

$$\{u\}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{2}{\sqrt{6}} \right\}^{\mathrm{T}}, \ \{u\}_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\}^{\mathrm{T}}.$$

Matricea FRF (3.152) devine

$$\left[H(\mathrm{i}\omega)\right] = \frac{\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}}{0{,}5 - \omega^2 + \mathrm{i}\ 0{,}05\,\omega} + \frac{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}{2 - \omega^2 + \mathrm{i}\ 0{,}2\,\omega}.$$

Pentru prima masă, FRF în punctul de excitare este

$$h_{11}(\mathrm{i}\omega) = \frac{1/6}{0{,}5 - \omega^2 + \mathrm{i}\ 0{,}05\,\omega} + \frac{1/3}{2 - \omega^2 + \mathrm{i}\ 0{,}2\,\omega}.$$

În figura 3.35 se prezintă diagrama Nyquist (linie continuă) care se obține prin însumarea diagramelor construite pentru fiecare termen din dezvoltarea în sumă de fracții parțiale (linii întrerupte).

3.6.4 Amortizorul vâscos neacordat

Amortizorul de vibraţii vâscos neacordat (amortizorul Houdaille) este utilizat la unele motoare cu ardere internă pentru a limita amplitudinile vibraţiilor torsionale pe un domeniu larg de turaţii. El constă dintr-un disc rigid care se poate roti liber într-o cavitate cilindrică umplută cu un fluid vâscos. La motoarele de automobil acesta este plasat la capătul arborelui cotit, în roata care antrenează cureaua ventilatorului.

Arborele cotit este modelat simplificat ca o bară în consolă, cu rigiditatea la răsucire *K*. Amortizorul ataşat la capătul liber are o carcasă cu momentul de inerţie masic *J* (fig. 3.36) în care se poate roti liber un disc cu momentul de inerţie masic J_d, asupra căruia acţionează un cuplu de amortizare proporţional cu viteza unghiulară relativă între carcasă şi disc. Dacă amortizorul este solicitat de un cuplu exterior armonic $M_0 \cos\omega t$, ecuaţiile de mişcare se pot scrie

$$\begin{aligned} J\,\ddot{\theta} + K\,\theta + c\left(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d\right) &= M_0 \cos\omega t, \\ J_d\,\ddot{\theta}_d - c\left(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d\right) &= 0, \end{aligned} \tag{3.154}$$

unde θ este rotirea carcasei şi θ_d este rotirea discului interior. Coeficientul de amortizare are expresia (Harris şi Crede, 1968)

$$c = 2\pi\,\mu\left(\frac{b\,R_2^3}{h_2} + \frac{R_2^4 - R_1^4}{2h_1}\right), \tag{3.155}$$

unde μ este vâscozitatea uleiului.

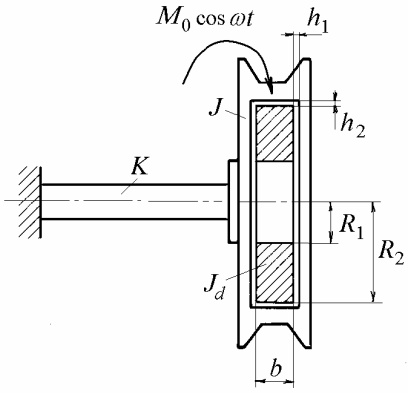


Fig. 3.36

Presupunând soluţii de forma

$$\theta = \theta_0 \cos\omega t\,, \qquad \theta_d = \theta_{d0} \cos\left(\omega t - \varphi\right),$$

şi notând

$$\omega_n^2 = \frac{K}{J}, \quad \eta = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \zeta = \frac{c}{2 J_d \, \omega_n}, \quad \lambda = \frac{J_d}{J}, \tag{3.156}$$

amplitudinea adimensională a carcasei este dată de

$$\left| \frac{K \theta_0}{M_0} \right| = \frac{\sqrt{\eta^2 + 4\zeta^2}}{\sqrt{\eta^2 \left(1 - \eta^2\right)^2 + 4\zeta^2 \left(\eta^2 + \lambda \eta^2 - 1\right)^2}}. \tag{3.157}$$

Pentru o valoare dată λ, diagramele amplitudinii adimensionale $\left| K \theta_0 / M_0 \right|$ sunt prezentate în funcție de pulsația adimensională η în fig. 3.37, pentru câteva valori ale raportului de amortizare ζ.

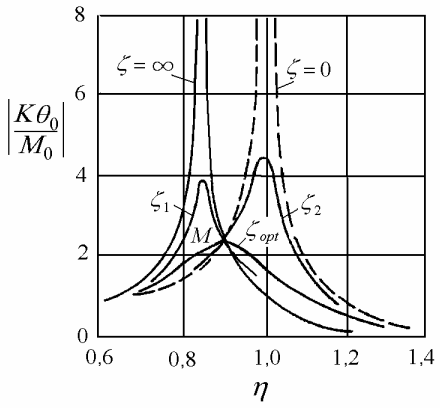


Fig. 3.37

Pentru $\zeta = 0$, curba corespunde unui sistem neamortizat cu pulsația de rezonanță ω_n, a cărui amplitudine este infinită la $\eta = 1$. Pentru $\zeta = \infty$, curba corespunde unui sistem neamortizat cu pulsația de rezonanță $\sqrt{K/(J + J_d)} = \omega_n / \sqrt{1 + \lambda}$, în care discul şi carcasa amortizorului se mişcă împreună ca o singură masă. Curbele trasate pentru aceste două valori extreme ale lui ζ se intersectează în punctul M, de abscisă $\eta_M = \sqrt{2/(2 + \lambda)}$. Pentru orice altă valoare a amortizării, toate curbele răspunsului trec prin acest punct. Există o valoare optimă a amortizării

$$\zeta_{opt} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \lambda)(2 + \lambda)}} \tag{3.158}$$

pentru care amplitudinea la rezonanță este minimă şi egală cu ordonata $1 + (2/\lambda)$ a punctului M.

Pe baza ecuațiilor (3.156) şi (3.158) se poate proiecta un amortizor de vibrații torsionale cu o curbă de răspuns aplatisată, eficient într-un domeniu larg de frecvențe excitatoare.

3.6.5 Absorbitorul de vibrații amortizat

Un *absorbitor dinamic de vibrații* constă dintr-un sistem secundar masă-arc ataşat sistemului primar (inițial) masă-arc pentru a-l proteja contra vibrațiilor.

Principalul efect al ataşării unui sistem secundar este transformarea dintr-un sistem cu un grad de libertate într-un sistem cu două grade de libertate. Valorile parametrilor fizici ai absorbitorului se aleg astfel încât deplasarea (sau alt parametru cinematic al) sistemului principal să fie minimă. Masa adăugată trebuie să aibă o mişcare suficient de mare ca să "absoarbă" energia introdusă în sistem de forța care acționează asupra masei inițiale. Dacă se ține cont de amortizarea din sistemul secundar, deplasarea masei principale nu poate fi redusă la zero, însă domeniul util de lucru al absorbitorului creşte, îmbunătățindu-i eficiența.

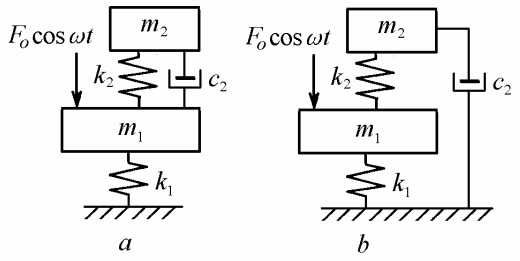


Fig. 3.38

3.6.5.1 Sistemul primar acționat de o forță armonică

Se consideră răspunsul armonic al unui sistem cu două grade de libertate, compus dintr-un sistem primar neamortizat şi un absorbitor cu amortizare vâscoasă (fig. 3.38, *a*). Un astfel de sistem se obține prin eliminarea amortizorului c_1 din sistemul prezentat în fig. 3.31.

Dacă se anulează coeficientul de amortizare c_1, şi se elimină forța f_2, ecuațiile (3.136) pot fi rescrise sub forma

$$\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1 + c_2\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right) + k_1 x_1 + k_2\left(x_1 - x_2\right) = f_1(t), \\ &m_2\ddot{x}_2 - c_2\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right) - k_2\left(x_1 - x_2\right) = 0. \end{aligned} \tag{3.159}$$

În regim staționar, cu forță (de amplitudine constantă) şi răspuns armonic

$$f_1 = F_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\ \ x_1 = \widetilde{X}_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\ \ x_2 = \widetilde{X}_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{3.160}$$

ecuațiile (3.159) devin

$$\begin{aligned} &\left(k_1 + k_2 - m_1\,\omega^2 + \mathrm{i}\,\omega\,c_2\right)\widetilde{X}_1 - \left(\mathrm{i}\,\omega\,c_2 + k_2\right)\widetilde{X}_2 = F_0\,, \\ &-\left(\mathrm{i}\,\omega\,c_2 + k_2\right)\widetilde{X}_1 + \left(k_2 - m_2\,\omega^2 + \mathrm{i}\,\omega\,c_2\right)\widetilde{X}_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.161}$$

Amplitudinea vibrațiilor sistemului primar $X_1 = \left|\widetilde{X}_1\right|$ poate fi exprimată sub forma

$$\frac{X_1}{x_{st}} = \sqrt{\frac{A^2\ \zeta_2^2 + B^2}{C^2\ \zeta_2^2 + D^2}} \tag{3.162}$$

unde

$$\begin{aligned} &x_{st} = F_o/k_1\,,\quad A = 2\,\mu\psi\,\theta\,,\ B = \mu\left(\psi^2 - \theta^2\right),\quad C = 2\mu\psi\,\theta\left(1 - \theta^2 - \mu\,\theta^2\right), \\ &D = \mu\,\left(\psi^2 - \theta^2\right)\left(1 - \theta^2\right) - \mu^2\psi^2\theta^2\,,\quad \zeta_2 = c_2/2\,\omega_2\,m_2\,, \\ &\mu = m_2/m_1\,,\quad \theta = \omega/\omega_1\,,\quad \psi = \omega_2/\omega_1\,,\quad \omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}\,,\quad \omega_2 = \sqrt{k_2/m_2}\,. \end{aligned} \tag{3.163}$$

Curbele de variație ale raportului X_1/x_{st} în funcție de pulsația adimensională θ sunt prezentate în fig. 3.39, pentru valori date μ şi ψ, şi câteva valori ale raportului de amortizare ζ_2. Absorbitorul reduce amplitudinea vibrațiilor sistemului primar de la valori infinite la o valoare finită mică, la $\theta = 1$.

Când $\zeta_2 = 0$, $X_1/x_{st} = B/D$. Când $\zeta_2 = \infty$, $X_1/x_{st} = A/C$. Curbele de răspuns trasate pentru cele două valori limită ale amortizării se intersectează în punctele *R* şi *S*. Toate curbele de răspuns ale masei primare în sistemul cu absorbitor, trasate pentru diferite valori ζ_2, trec prin aceste două puncte, numite "punctele fixe".

Variind raportul pulsațiilor ψ, ordonatele celor două puncte cresc sau scad. Cazul cel mai favorabil, în care se obține valoarea minimă a răspunsului dinamic maxim pe întregul domeniu de pulsații, se poate obține dacă sunt satisfăcute următoarele două condiții (J. Ormondroyd şi J. P. den Hartog, 1928):

a) Cele două puncte *R* şi *S* să aibă ordonate egale. Aceasta se realizează dacă (E. Hahnkamm, 1932) raportul între pulsația proprie a absorbitorului şi cea a sistemului primar este

$$\psi_{opt} = \frac{1}{1+\mu}. \tag{3.164}$$

b) Pantele curbelor de răspuns în punctele *R* şi *S* să fie zero, deci cele două puncte să devină două maxime în curba de răspuns.

Din păcate, pentru o valoare dată a raportului pulsaţiilor ψ , nu pot exista două maxime de ordonate egale. Totuşi, dacă panta în unul din puncte este zero, panta în celălalt punct este foarte apropiată de zero. Aceasta se obţine atunci când răspunsul (deplasarea) sistemului primar este

$$\left(X_1/x_{st}\right)_{opt} = \sqrt{1+\frac{2}{\mu}}\,. \tag{3.165}$$

Pulsaţiile adimensionale la care apar cele două vârfuri (abscisele punctelor fixe) au expresiile

$$\theta^2 = \frac{1 \pm \sqrt{2/(2+\mu)}}{1+\mu}\,. \tag{3.166}$$

Raportul pulsaţiilor θ la care apare minimul dintre cele două vârfuri este egal cu media aritmetică a valorilor de mai sus $\sqrt{1/(1+\mu)} = \psi^{1/2}$. Acesta este deci raportul pulsaţiilor la care se acordează absorbitorul.

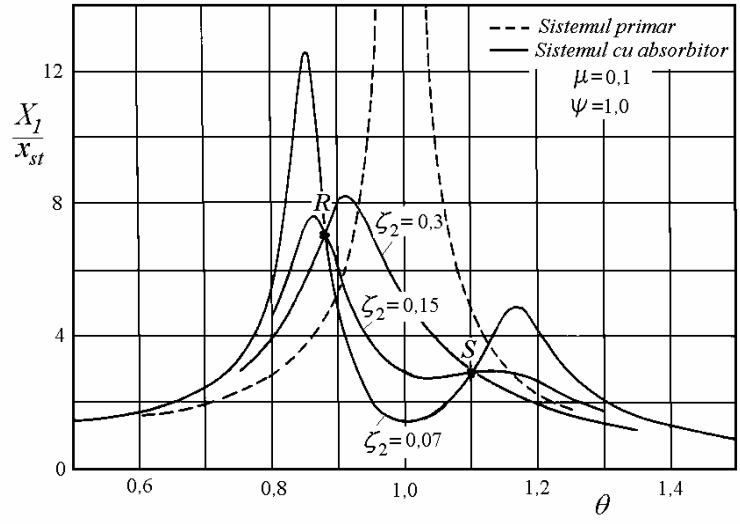


Fig. 3.39

Coeficientul de amortizare optim care rezultă din respectarea celor două condiţii se poate obţine derivând relaţia (3.162) în raport cu θ şi egalând cu zero pentru fiecare punct de intersecţie, rezultând două valori $\zeta_2\,\psi = c_2/2\,m_2\,\omega_1$.

Diferența între aceste valori crește atunci când raportul μ (între masa absorbitorului şi masa sistemului primar) creşte. Se obişnuieşte să se aleagă media aritmetică a acestor valori (J. E. Broch, 1946)

$$c_2/2\,m_2\,\omega_1 = \sqrt{3\,\mu/8\left(1+\mu\right)^3}\ ,$$

sau

$$\zeta_{2opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8\left(1+\mu\right)}}\,. \tag{3.167}$$

În plus, deplasarea relativă între masa principală şi cea a absorbitorului

$$\left|\,X_1 - X_2\,\right| = \sqrt{\frac{X_1 F}{2\mu k_1 \theta\left(c_2/2\,m_2\,\omega_1\right)}} \tag{3.168}$$

trebuie să fie relativ mică, pentru a evita ruperea prin oboseală a arcului absorbitorului.

Teoria prezentată, strict valabilă dacă sistemul primar este neamortizat, poate fi extinsă la sisteme slab amortizate.

Dacă se minimizează *viteza* masei sistemului primar (în locul deplasării) acționat de o forță armonică de amplitudine constantă, atunci parametrii optimi ai absorbitorului dinamic au valorile (V. H. Neubert, 1964)

$$\psi_{opt} = \frac{\sqrt{1+\mu/2}}{1+\mu}, \qquad \zeta_{2opt} = \sqrt{\frac{3\mu\left(1+\mu+5\mu^2/24\right)}{8\left(1+\mu\right)\left(1+\mu/2\right)^2}}, \tag{3.169}$$

$$\left(\frac{k_1\dot{X}_1}{F_0\,\omega}\right)_{opt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}}\,\sqrt{\frac{1+\mu/2}{1+\mu}}\,. \tag{3.170}$$

Dacă asupra masei sistemului primar acționează o forță armonică cu aplitudinea proporțională cu pătratul pulsației $m_0 r\omega^2$, atunci parametrii optimi ai absorbitorului dinamic au valorile (G. B. Warburton şi E. O. Ayorinde, 1980)

$$\psi_{opt} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu}}, \qquad \zeta_{2opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8\left(1+\mu/2\right)}}, \tag{3.171}$$

$$\left(\frac{m_1 X_1}{m_0 r}\right)_{opt} = \sqrt{\frac{2+\mu}{\mu\left(1+\mu\right)}}\,. \tag{3.172}$$

3.6.5.2 Sistemul primar acționat la bază cu o accelerație armonică

Dacă suportul sistemului primar vibrează cu o accelerație armonică de amplitudine constantă $\ddot{X}_0$ şi se minimizează accelerația masei sistemului primar, atunci parametrii optimi ai absorbitorului dinamic au aceleaşi valori (3.164), (3.165) şi (3.167) ca în problema clasică (F. M. Sauer şi C. F. Garland, 1949).

Dacă însă se minimizează deplasarea masei m_1, atunci (G. B. Warburton, 1982)

$$\psi_{opt} = \frac{\sqrt{1-\mu/2+\sqrt{1-3\mu-(7/4)\mu^2}}}{2(1+\mu)^2}, \tag{3.173}$$

$$\zeta_{2opt} = \sqrt{\frac{3\mu\left(1-3\mu+1{,}5\mu^2-2{,}833\mu^3\right)}{8\left(1-3{,}5\mu-2\mu^2-0{,}5\mu^3\right)}}, \tag{3.174}$$

$$\left(\frac{\omega^2 X_1}{\ddot{X}_0}\right)_{opt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}}\left(1+2\mu+2{,}125\mu^2+3{,}375\mu^3+\ldots\right). \tag{3.175}$$

Pentru ca ψ_{opt} să fie real, raportul maselor $\mu < 2/7$. Expresiile (3.174) şi (3.175) s-au obținut prin dezvoltări în serie care asigură o precizie de 0,1% pentru $\mu \le 0{,}1$.

3.6.5.3 Amortizorul sistemului secundar ataşat de un reper fix

În fig. 3.38, *b* se prezintă o variantă a absorbitorului dinamic amortizat, în care amortizorul nu este ataşat de sistemul primar ci de un reper fix.

Amplitudinea vibrațiilor sistemului primar este dată de expresia (3.162) unde *A*, *B* şi *D* sunt date de (3.163) iar $C = 2\psi\theta\left(1-\theta^2+\mu\psi^2\right)$. Aplicând metoda optimizării bazată pe teoria punctelor fixe (M. Z. Rai, 2001), se obține condiția de acordare optimă

$$\psi_{opt} = \sqrt{\frac{1}{1-\mu}} \tag{3.176}$$

şi amortizarea optimă

$$\zeta_{2opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu/2)}}. \tag{3.177}$$

În aceste condiții, răspunsul (deplasarea) sistemului primar maxim este

$$\left(\frac{X_1}{x_{st}}\right)_{opt} = \left(1-\mu\right)\sqrt{\frac{2}{\mu}}. \qquad (3.178)$$

Comparând expresiile (3.165) şi (3.178) se observă că, pentru acelaşi raport al maselor μ, din relaţia (3.178) rezultă un nivel al vibraţiilor masei principale mai mic decât din relaţia (3.165). Deci, fără a creşte masa adiţională, nivelul vibraţiilor masei m_1 poate fi redus mai eficient legând amortizorul la un punct fix.

3.6.5.4 Aplicaţii ale absorbitorilor dinamici de vibraţii

Relaţiile obţinute pentru parametrii absorbitorului optim pot fi utilizate şi atunci când sistemul principal este un corp elastic, cu condiţia ca acesta să aibă pulsaţii proprii bine separate, amortizare relativ mică şi să se utilizeze în calcule masa efectivă a acestuia. Sistemul real este înlocuit cu un sistem echivalent cu un grad de libertate. Masa distribuită este concentrată în punctul de ataşare a absorbitorului, în care se poate calcula rigiditatea echivalentă a sistemului.

Absorbitorul dinamic a fost inventat de H. Frahm în 1909 şi patentat în 1911.

La conductoarele electrice aeriene ale liniilor de înaltă tensiune apar vibraţii transversale cu frecvenţe între 5 şi 50 Hz şi amplitudini de ordinul diametrului conductorului, produse de curenţi de aer cu viteze între 1 şi 8 m/s. Problema a fost studiată prima dată în 1925 la linia de 220 kV dintre Big Creek şi Los Angeles, pentru care G. H. Stockbridge a proiectat un absorbitor dinamic cu două greutăţi din beton dispuse la capetele unei tije din oţel montat sub conductorul electric în punctul de amplitudine maximă a vibraţiilor. În prezent, *absorbitorul Stockbridge* simetric se construieşte în soluţia Monroe-Templin (fig. 3.40).

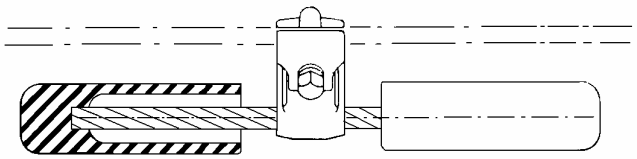


Fig. 3.40

Acesta constă dintr-un cablu toronat (care are amortizare, datorită frecării între fire) cu două greutăţi (metalice cilindrice) la capete, fixat cu o bridă centrală sub conductorul electric, deobicei în apropierea stâlpului de susţinere.

Absorbitorul este un element reactiv, care absoarbe energia vibraţiilor liniei aeriene, realizând o cvasi-antirezonanţă, deci un punct aproape fix în apropierea stâlpului, limitând astfel solicitările mari din punctul de prindere de

stâlp al conductorului electric. Există o gamă largă de absorbitori Stockbridge, pentru conductoare cu diametre până la 75 mm şi deschideri până la 670 m.

Deobicei, absorbitorul este acordat pe frecvenţele forţelor transversale armonice produse de desprinderea vârtejurilor alternante de tip Kármán. Acestea se calculează pe baza vitezei vântului, diametrului conductorului şi numărului Strouhal al curgerii.

Sub acţiunea vântului şi cutremurelor, clădirile înalte au vibraţii laterale şi vibraţii torsionale. Pentru limitarea acestora, se utilizează absorbitori dinamici amplasaţi la un etaj superior, conform schemei din fig. 3.41.

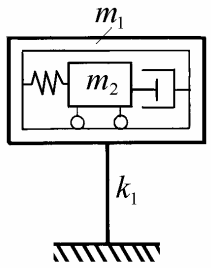


Fig. 3.41

Prima aplicaţie de acest fel s-a utilizat la clădirea John Hancock Tower din Boston, Massachussetts, în urma plângerilor locatarilor deranjaţi de vibraţiile clădirii produse de vânt (1976). La extremităţile etajului superior au fost instalate două mase de câte 300 tone (plumb în cutii de oţel) acţionate hidraulic, sistemul secundar având perioade proprii până la 7 secunde şi amplitudini până la 1,8 m. Când clădirea se "clatină" sub acţiunea vântului, greutăţile tind să rămână fixe în spaţiu, permiţând podelei să alunece sub ele, arcurile şi amortizoarele acţionând asupra structurii din oţel, reducând vibraţiile.

A doua aplicaţie a fost la Citycorp Center din Manhattan (1977), absorbitorul având o greutate din beton de 360 tone, acţionată hidraulic pe două direcţii perpendiculare între ele. Sistemul hidraulic care realizează suspensia este pornit automat când vibraţiile produse de vânt depăşesc un anumit nivel. Oscilaţiile masei absorbitorului dinamic preiau din energia vibraţiilor clădirii, realizând o reducere până la 50% a amplitudinii acestora. Soluţia este mai ieftină decât rigidizarea structurii.

Turnul Taipei 101 are la etajul 88 un absorbitor dinamic cu o masă sferică de 700 tone suspendată pendular pe cabluri. Hotelul Burj al-Arab din Dubai (321 m) are opt absorbitori dinamici orizontali montaţi la înălţimea de 280 m în braţele exterioare din oţel şi trei absorbitori plasaţi în vârful catargului antenei. Absorbitori dinamici sunt montaţi şi în antenele celor două clădiri Emirates Towers din Dubai şi în turnul televiziunii din Berlin.

Absorbitorii dinamici pot fi utilizați pentru atenuarea vibrațiilor blocurilor de fundații ale compresoarelor cu piston. O soluție care utilizează absorbitori cu mase din fontă, montate pe arcuri din oțel în consolă, este prezentată în fig. 3.42 (Allaway şi Grootenhuis, 1965).

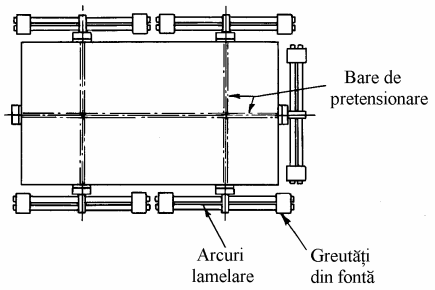


Fig. 3.42

În fig. 3.43 se prezintă absorbitori utilizați la maşini electrice (J. Ormondroyd şi J. P. den Hartog, 1928). Pe piedestalul lagărului exterior al unui turbogenerator de 300 MW s-au înregistrat vibații axiale de 137 μm la turația de 1800 rot/min. S-au montat doi absorbitori constând dintr-o bară în consolă, de lungime 0,5m şi secțiune transversală 200×67 mm, şi o greutate de 110 N cu poziție reglabilă pe verticală, calculată să aibă o frecvență proprie de 30 Hz. Amplitudinea vibrațiilor a fost redusă la 48 μm.

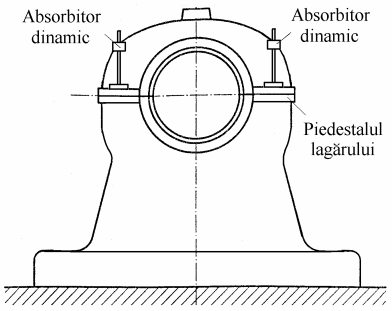


Fig. 3.43

Podurile pentru pietoni şi pasarelele pot vibra sub acțiunea vântului sau a forțelor produse de trecerea pietonilor. Sunt cunoscute problemele ridicate de vibrațiile laterale ale podului Millenium Bridge din Londra (cu amplitudini până la 70 mm la frecvența de 0,95 Hz) sub care au fost montați 52 de absorbitori de vibrații. Aceeaşi problemă a apărut la podurile din Auckland, Birmingham şi Chester, cu frecvențe laterale de ordinul a 0,7 Hz şi în Paris, la podul peste Sena

dintre grădinile Tuileries şi Quay d'Orsay şi recent la pasarela Simone de Beauvoir. În fig. 3.44 se arată un absorbitor pentru vibraţii verticale, cu o masă de 710 kg şi amortizare cu aer (V. A. L. Chasteau, 1973).

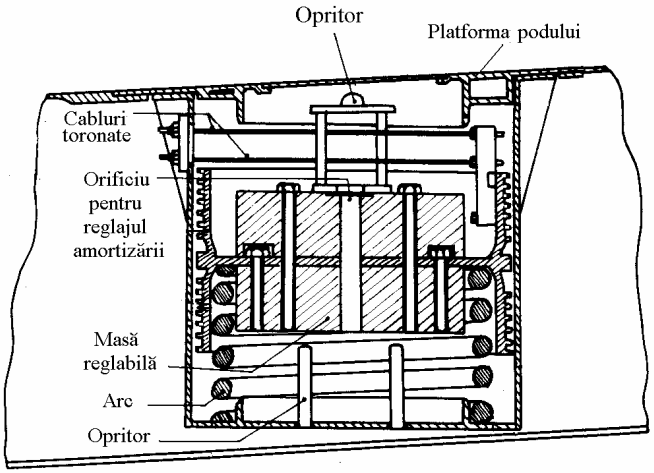


Fig. 3.44

O aplicaţie la o maşină de tuns electrică este prezentată în fig. 3.45. Mişcarea de dute-vino a lamelei tăietoare produce vibraţiile mânerului care sunt atenuate de amortizorul dinamic realizat ca o bară în consolă cu o masă în capăt, fixată de carcasa maşinii (I. O. Miner, 1931).

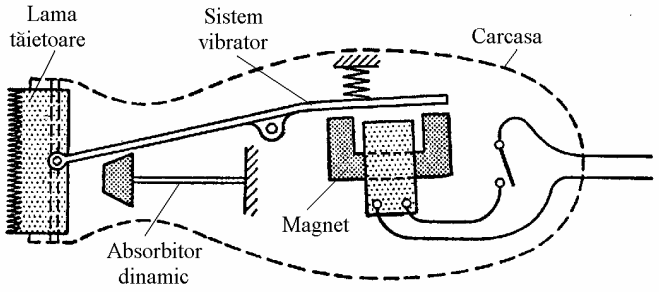


Fig. 3.45

În fig. 3.46 se arată schiţa unei bare de strunjit interior prevăzută cu un absorbitor dinamic. Masa absorbitorului (din plumb) este cilindrică. Capetele de diametru mai mic sunt rezemate pe două inele din cauciuc. Acestea pot fi comprimate axial cu o forţă reglabilă, modificându-se astfel rigiditatea şi coeficientul de amortizare ale absorbitorului, pentru acordarea acestuia.

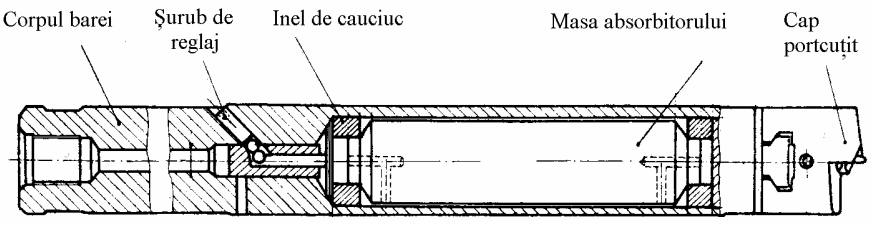


Fig. 3.46

La barele de alezat şi la cuțitele de strung se pot utiliza şi absorbitori dinamici cu acțiune prin impact. În fig. 3.47 se arată absorbitorul cu impact pentru cuțite de strung pentru degroşare proiectat de D. J. Rîjkov (1953).

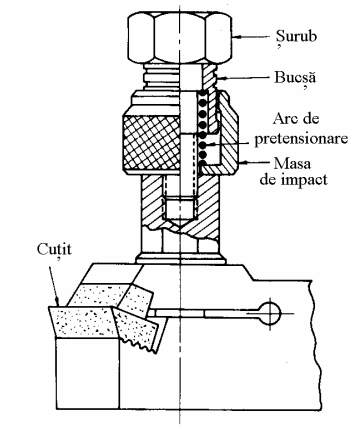


Fig. 3.47

De menționat că absorbitorul Lanchester a fost aplicat la bare de găurit (R. S. Hahn, 1951) iar absorbitori amortizați, cu elemente deformabile din elastomeri sau materiale plastice (având atât elasticitate cât şi amortizare), sunt frecvent utilizați la maşini unelte

3.6.6 Amortizarea vâscoasă neproporțională

Se consideră sistemul din fig. 3.30, *a* cu amortizare vâscoasă neproporțională. Ecuația vibrațiilor libere (3.121, *a*) este

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\}, \qquad (3.179)$$

unde matricea $[c]$ nu este proporțională nici cu matricea $[m]$ nici cu $[k]$.

Pentru simplificarea calculelor, ecuația de ordinul doi (3.179) este transformată într-o ecuație de ordinul întâi în spațiul stărilor, introducând o ecuație auxiliară

$$[m]\{\dot{x}\}-[m]\{\dot{x}\}=\{0\}. \tag{3.180}$$

Combinând ecuațiile (3.179) şi (3.180) rezultă

$$\begin{bmatrix}[m] & [0]\\ [0] & [m]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\dot{x}\}\\ \{\ddot{x}\}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}[0] & -[m]\\ [k] & [c]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{x\}\\ \{\dot{x}\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{0\}\\ \{0\}\end{Bmatrix} \tag{3.181}$$

sau

$$[A]\{\dot{q}\}+[B]\{q\}=\{0\}, \tag{3.182}$$

unde matricile $[A]$ and $[B]$, de dimensiuni 4 x 4, sunt reale

$$[A]=\begin{bmatrix}[m] & [0]\\ [0] & [m]\end{bmatrix},\qquad [B]=\begin{bmatrix}[0] & -[m]\\ [k] & [c]\end{bmatrix}.$$

Înlocuind o soluție de forma $\{q\}=\{\Phi\}\mathrm{e}^{st}$, şi corespunzător $\{x\}=\{u\}\mathrm{e}^{st}$, ecuația (3.182) devine

$$(s[A]+[B])\{\Phi\}=\{0\}. \tag{3.183}$$

Există patru valori proprii s_r, soluții ale ecuației

$$\det(s[A]+[B])=0, \tag{3.184}$$

şi patru vectori proprii $\{\Phi\}_r$ care satisfac problema generalizată de valori proprii

$$[B]\{\Phi\}_r=-s_r[A]\{\Phi\}_r. \qquad (r=1,...,4) \tag{3.185}$$

Ecuația (3.185) se poate scrie sub forma

$$-[A]^{-1}[B]\{\Phi\}_r=s_r\{\Phi\}_r, \qquad (r=1,...,4) \tag{3.186}$$

unde

$$-[A]^{-1}[B]=\begin{bmatrix}[0] & [I]\\ -[m]^{-1}[k] & -[m]^{-1}[c]\end{bmatrix}. \tag{3.187}$$

Ecuația (3.181) devine

$$\left(\begin{bmatrix}[0] & [I]\\ -[m]^{-1}[k] & -[m]^{-1}[c]\end{bmatrix}-s\begin{bmatrix}[I] & [0]\\ [0] & [I]\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\{u\}\\ s\{u\}\end{Bmatrix}=\{0\}. \tag{3.188}$$

La sisteme cu 2 g.d.l. amortizate subcritic, ecuația (3.188) are două perechi de rădăcini complexe conjugate

$$s_{1,2}=-\sigma_1 \pm \mathrm{i}\omega_{d1}, \qquad s_{3,4}=-\sigma_2 \pm \mathrm{i}\omega_{d2}, \tag{3.189}$$

unde părțile imaginare, ω_{d1} şi ω_{d2}, sunt *pulsațiile proprii amortizate* iar părțile reale, σ_1 şi σ_2, sunt *factori de amortizare* (constante de atenuare). Vectorii proprii $\{\Phi\}_r$ sunt complecşi conjugați.

Între parametrii de mai sus şi *valorile absolute ale pulsațiilor proprii* şi *rapoartele de amortizare* se stabilesc relațiile

$$\omega_r=\sqrt{\omega_{dr}^2+\sigma_r^2}, \qquad \zeta_r=\frac{\sigma_r}{\omega_r}. \qquad r=1,2 \tag{3.190}$$

În general, la modurile de vibrație amortizate supracritic, valorile proprii reale se pot scrie

$$s_r, s_{r+1}=-\sigma_r \mp \tau_r, \tag{3.191}$$

iar relațiile (3.190) devin

$$\omega_r=\sqrt{\sigma_r^2-\tau_r^2}, \qquad \zeta_r=\frac{\sigma_r}{\omega_r}. \tag{3.192}$$

Mişcarea într-un mod amortizat supracritic este aperiodică. În acest caz, nu există un vârf de rezonanță în diagrama amplitudine-pulsație sau o buclă în diagrama Nyquist chiar pentru pulsații proprii relativ depărtate.

Pentru sisteme amortizate subcritic, din ecuația (3.188) se obțin două perechi de vectori complecşi conjugați, a căror jumătate superioară defineşte forma modală. Diferența de fază între mişcările în gradele de libertate într-un mod de vibrație face ca amplitudinea deplasării maxime a maselor să se înregistreze în momente diferite în timp. Mişcarea într-un mod de vibrație complex nu mai este sincronă, şi nu are caracterul unei unde staționare, cu noduri şi ventre fixe, ca la sistemele cu amortizare proporțională. Ea are proprietățile unei unde progresive, cu noduri şi ventre care se deplasează ciclic, configurația repetându-se la fiecare ciclu de vibrație,

Exemplul 3.14

Sistemul din fig. 3.31 are $m_1=100\,\mathrm{kg}$, $m_2=1\,kg$, $k_1=9{,}9\cdot10^6\,\mathrm{N/m}$, $k_2=0{,}1\cdot10^6\,\mathrm{N/m}$, $c_1=c_2=125\,\mathrm{Ns/m}$. Să se calculeze parametrii modali şi să se traseze diagramele Nyquist ale receptanțelor complexe.

Rezolvare. Matricile de masă, de rigiditate şi de amortizare sunt

$$[m]=\begin{bmatrix}100 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ [k]=10^5\cdot\begin{bmatrix}100 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix},\ [c]=\begin{bmatrix}250 & -125\\ -125 & 125\end{bmatrix}.$$

Valorile proprii cu parte imaginară pozitivă sunt

$$\lambda_1=-4{,}785+\mathrm{i}\cdot 312{,}659,\qquad \lambda_2=-58{,}965+\mathrm{i}\cdot 312{,}685.$$

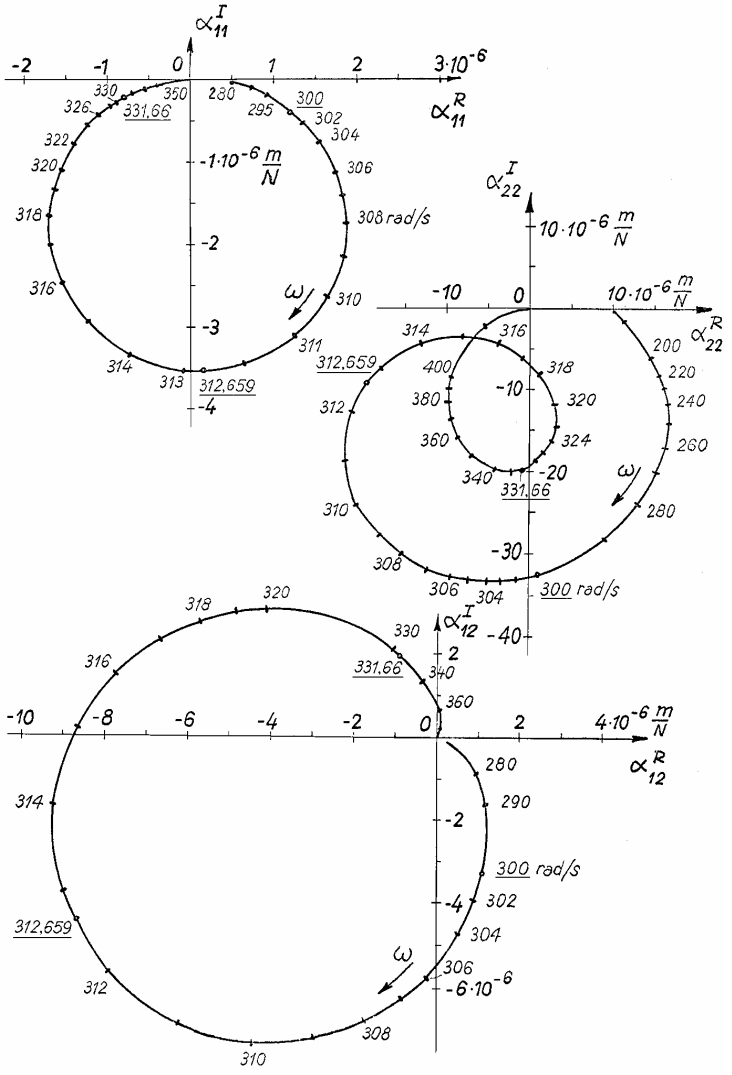


Fig. 3.48

Vectorii proprii corespunzători sunt

$$\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}207 - \mathrm{i} \cdot 2{,}698 \end{Bmatrix}, \qquad \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -8{,}865 - \mathrm{i} \cdot 35{,}222 \end{Bmatrix}.$$

Pulsațiile proprii amortizate sunt $\omega_{d1} = 312{,}66$ rad/s şi $\omega_{d2} = 312{,}68$ rad/s. Valorile absolute ale pulsațiilor proprii sunt $\omega_1 = \sqrt{\omega_{d1}^2 + \sigma_1^2} = 312{,}70$ rad/s, $\omega_2 = \sqrt{\omega_{d2}^2 + \sigma_2^2} = 318{,}19$ rad/s. Rapoartele de amortizare modale sunt $\zeta_1 = \sigma_1 / \omega_1 = 0{,}015$ şi $\zeta_2 = \sigma_2 / \omega_2 = 0{,}185$.

Pulsațiile proprii neamortizate ale sistemului conservativ asociat sunt $\omega_{01} = 300$ rad/s şi $\omega_{02} = 100\sqrt{11} = 331{,}66$ rad/s, fiind diferite de valorile absolute ale valorilor proprii ale sistemului cu amortizare neproporțională. În acest caz, diferența între pulsațiile proprii amortizate este 0,026 rad/s, deci 0,0041 Hz, în timp ce pulsațiile proprii neamortizate diferă cu 5,039 Hz. Cuplajul prin amortizare apropie relativ pulsațiile proprii, ceea ce complică determinarea lor experimentală.

Diagramele Nyquist ale receptanțelor $\alpha_{ij} = x_i / f_j$, $i, j = 1, 2$, sunt prezentate în fig. 3.48 cu pulsația excitatoare marcată de-a lungul curbelor. Forma neobişnuită a diagramelor receptanțelor directe, fără bucle distincte, este produsă de apropierea relativă a pulsațiilor proprii şi valoarea relativ mare a amortizării în modul al doilea de vibrație.

Exemplul 3.15

Să se calculeze parametrii modali ai sistemului din fig. 3.31, utilizând valorile parametrilor date în Tabelul 3.1 pentru următoarele patru cazuri: *cazul I*: sistem slab amortizat, cu pulsații proprii relativ depărtate; *cazul II*: sistem slab amortizat, cu pulsații proprii relativ apropiate; *cazul III*: sistem puternic amortizat, cu pulsații proprii relativ depărtate; *cazul IV*: sistem puternic amortizat, cu pulsații proprii relativ apropiate.

Tabelul 3.1

Cazul		I	II	III	IV
$M_1 = M_2$	kg	0,0259	0,0259	0,0259	0,0259
$K_1 = K_3$	N/m	100	100	100	100
K_2	N/m	50	1	50	1
C_1	Ns/m	0,3	0,3	3	3
C_2	Ns/m	0,2	0,2	2	2
C_3	Ns/m	0,1	0,1	1	1

Să se traseze apoi diagramele Nyquist ale receptanţelor complexe pentru cele patru sisteme.

Rezolvare. Pulsaţiile proprii neamortizate au expresiile

$$\omega_{01}^2 = \frac{k_3}{m_2}, \qquad \omega_{02}^2 = \omega_{01}^2 \left(1 + 2\frac{k_2}{k_3} \right).$$

Vectorii modali neamortizaţi sunt aceiaşi în toate cazurile

$$\{a\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \{a\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}.$$

Matricile maselor modale, rigidităţilor modale şi amortizărilor modale, calculate cu ajutorul matricii modale construite cu vectorii de mai sus, sunt

$$[M] = \begin{bmatrix} 2m_1 & 0 \\ 0 & 2m_2 \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & 0 \\ 0 & k_1 + k_3 + 4k_2 \end{bmatrix},$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_3 & c_1 - c_3 \\ c_1 - c_3 & c_1 + c_3 + 4c_2 \end{bmatrix}.$$

Dacă $c_1 \neq c_3$, amortizarea este neproporţională iar matricea de amortizare modală nu este proporţională cu matricile modale de masă şi de rigiditate.

Valorile proprii sunt soluţii ale ecuaţiei algebrice de gradul patru

$$\begin{vmatrix} m_1 s^2 + (c_1 + c_2)s + k_1 + k_2 & -c_2 s - k_2 \\ -c_2 s - k_2 & m_2 s^2 + (c_2 + c_3)s + k_2 + k_3 \end{vmatrix} = 0.$$

La moduri de vibraţie amortizate subcritic, valorile proprii complexe pot fi scrise sub forma (3.179), în timp ce pentru moduri amortizate supracritic valorile proprii reale pot fi scrise sub forma (3.181).

Valorile numerice ale parametrilor modali sunt date în Tabelul 3.2.

Tabelul 3.2

Cazul		I		II		III		IV	
ω_{01}	ω_{02}	62,13	87,86	62,13	62,75	62,13	87,86	62,13	62,75
ω_1	ω_2	62,24	87,69	62,16	62,71	64,28	84,92	62,16	62,71
ζ_1	ζ_2	0,062	0,132	0,055	0,192	0,540	1,409	0,547	1,919
ω_{d1}	ω_{d2}	62,13	86,93	62,07	61,55	54,09	-	52,01	-
σ_1	σ_2	3,845	11,594	3,406	12,033	34,734	-	34,044	-

Pulsațiile proprii neamortizate diferă de valorile absolute ale valorilor proprii ale sistemului cu amortizare neproporțională, $\omega_{0r} \neq \omega_r$. În cazul cuplajului prin amortizare, valorile absolute ale valorilor proprii, uneori denumite *pulsații de rezonanță*, sunt mai apropiate între ele decât pulsațiile proprii neamortizate corespunzătoare, în timp ce pulsațiile proprii amortizate pot avea ordinea inversată. Pentru primul mod de vibrație, $\omega_1 > \omega_{01}$, în timp ce pentru modul al doilea, $\omega_2 < \omega_{02}$, iar în cazul II, $\omega_{d2} < \omega_{d1}$.

Modul al doilea este amortizat supracritic în cazurile III şi IV, având raportul de amortizare modal $\zeta_r > 1$. Într-adevăr, pentru valorile parametrilor fizici corespunzătoare sistemelor cu pulsații proprii neamortizate relativ depărtate, modul al doilea de vibrație devine amortizat supracritic la o valoare $c_3 \cong 0{,}749\,\mathrm{Ns/m}$, în timp ce primul mod de vibrație devine amortizat supracritic pentru valori mai mari decât $c_3 \cong 1{,}89\,\mathrm{Ns/m}$.

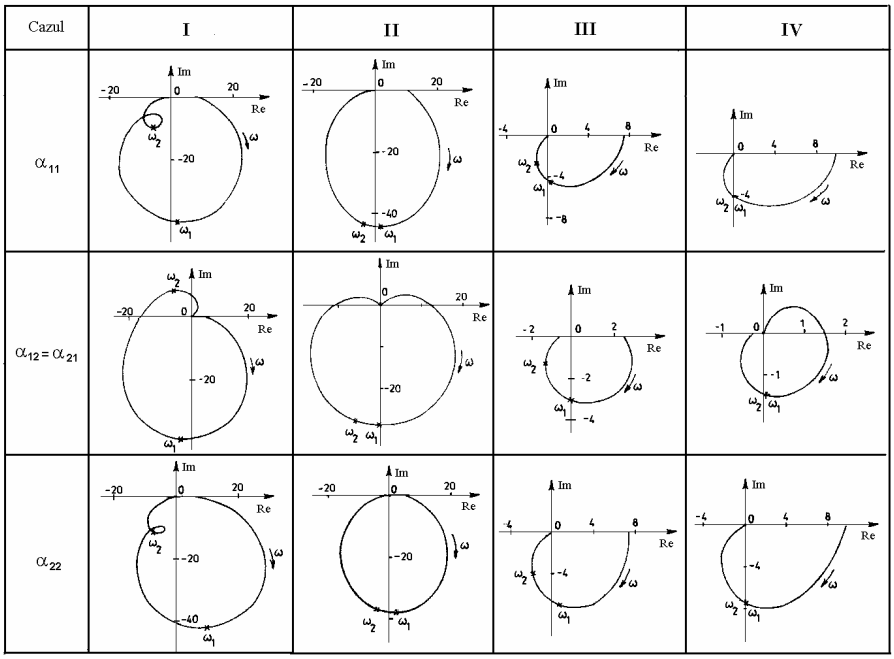


Fig. 3.49

Diagramele polare ale receptanțelor complexe sunt prezentate în fig. 3.49. Cu excepția cazului I, diagramele nu au două bucle, câte una pentru fiecare mod de vibrație, astfel că numărul gradelor de libertate nu poate fi stabilit prin simpla inspectare vizuală a diagramelor răspunsului în frecvență. În astfel de cazuri, localizarea rezonanței necesită metode adecvate, tratate în volumul 2.

Probleme

3.E1 La sistemul din fig. 3.1, cu $k_1 = 2k$, $k_2 = k$, $k_3 = 2k$, $m_1 = 3m$, $m_2 = m$, se cer ecuaţiile de mişcare şi modurile proprii de vibraţie.

Răspuns: $\omega_1 = 0{,}919\sqrt{k/m}$, $\omega_2 = 1{,}776\sqrt{k/m}$, $\mu_1 = 0{,}464$, $\mu_2 = -6{,}464$.

3.E2 Să se determine amplitudinile vibraţiilor forţate ale sistemului din fig. 3.4, dacă $k_1 = 10^3\ \mathrm{N/m}$, $k_2 = 500\ \mathrm{N/m}$, $k_3 = 2\cdot 10^3\ \mathrm{N/m}$, $m_1 = 5\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 10\,\mathrm{kg}$, $\hat{f}_1 = 100\,\mathrm{N}$, $\hat{f}_2 = 0$, $\omega = 15\ \mathrm{rad/s}$.

Răspuns: $X_1 = 0{,}16\,\mathrm{m}$, $X_2 = -0{,}32\,\mathrm{m}$.

3.E3 Să se determine amplitudinile vibraţiilor forţate ale sistemului din fig. 3.4, pentru $k = 10^3\ \mathrm{N/m}$, $m = 5\,\mathrm{kg}$, $\hat{f}_1 = 50\,\mathrm{N}$, $\hat{f}_2 = 100\,\mathrm{N}$, $\omega = 10\ \mathrm{rad/s}$.

Răspuns: $X_1 = -0{,}5\,\mathrm{m}$, $X_2 = -0{,}8\,\mathrm{m}$.

3.E4 Să se determine pulsaţiile proprii şi formele modale pentru vibraţiile torsionale ale sistemului din fig. 3.6. Rigidităţle arborilor sunt $K_1 = K$, $K_2 = 2K$, $K_3 = 3K$, iar momentele de inerţie masice ale discurilor sunt $J_1 = 2J$, $J_2 = J$.

Răspuns: $\omega_1 = \sqrt{K/J}$, $\omega_2 = 2{,}345\sqrt{K/J}$, $\mu_1 = 0{,}5$, $\mu_2 = -4$.

3.E5 Utilizând următoarele valori numerice: $K_1 = 10^7\ \mathrm{Nm/rad}$, $K_2 = 10^7\ \mathrm{Nm/rad}$, $K_3 = 3\cdot 10^7\ \mathrm{Nm/rad}$, $J_1 = 100\,\mathrm{kg\,m^2}$, $J_2 = 200\,\mathrm{kg\,m^2}$, $\hat{f}_1 = 100\,\mathrm{N}$, $\hat{f}_2 = 0$, $\omega = 15\ \mathrm{rad/s}$, să se determine amplitudinile vibraţiilor torsionale ale sistemului din fig. 3.6, dacă pe discul al doilea acţionează un cuplu armonic de amplitudine $M_0 = 10^5\ \mathrm{N}$ şi pulsaţie $\omega = 300\ \mathrm{rad/s}$.

Răspuns: $\Theta_1 = 0{,}00735\ \mathrm{rad}$, $\Theta_2 = 0{,}00772\ \mathrm{rad}$.

3.E6 Să se calculeze pulsaţiile proprii şi formele modurilor proprii ale vibraţiilor de încovoiere pentru sistemul din fig. 3.15, în care $m_1 = 3m$, $m_2 = m/3$, $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ şi $EI = const.$

Răspuns: $\omega_1 = 0{,}522\sqrt{EI/m\ell^3}$, $\omega_2 = 1{,}73\sqrt{EI/m\ell^3}$, $\mu_1 = 6$, $\mu_2 = -1{,}5$.

3.E7 Să se determine modurile proprii ale vibrațiilor laterale ale sistemului prezentat în fig. 3.20, unde $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, $\ell_3 = \ell/2$ şi $f = 0$.

Răspuns: $\omega_1 = 1{,}477\sqrt{EI/m\ell^3}$, $\omega_2 = 3{,}464\sqrt{EI/m\ell^3}$, $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = 2$.

3.E8 Să se calculeze pulsațiile proprii şi formele modurilor proprii ale vibrațiilor de încovoiere ale barei de greutate neglijabilă din fig. 3.E8, pe care sunt montate două mase.

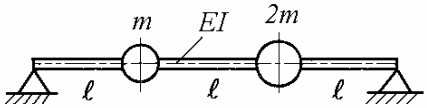


Fig. 3.E8

Răspuns: $\omega_1 = 0{,}891\sqrt{EI/m\ell^3}$, $\omega_2 = 3{,}688\sqrt{EI/m\ell^3}$, $\mu_1 = 1{,}048$, $\mu_2 = -0{,}477$.

3.E9 Să se determine amplitudinile vibrațiilor maselor din fig. 3.E9, utilizând următoarele valori numerice: $EI/m\ell^3 = 800\ \text{sec}^{-2}$, $F_0\ell^3/EI = 2$ mm şi $\omega = 10$ rad/s.

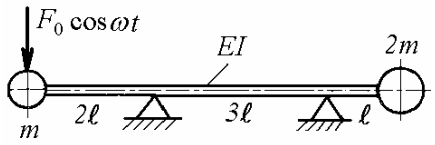


Fig. 3.E9

Răspuns: $Y_1 = 117{,}5$ mm, $Y_2 = 25{,}04$ mm.

3.E10 Să se scrie ecuațiile de mişcare ale sistemului din fig. 3.E10 utilizând drept coordonate deplasarea *x* a centrului de greutate şi rotația θ față de

acest punct. Să calculeze pulsaţiile proprii şi să se traseze formele modurilor de vibraţie, cu localizarea nodului în fiecare mod.

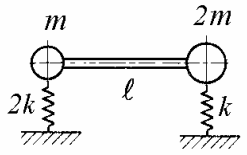


Fig. 3.E10

Răspuns: $\omega_1 = 0{,}707\sqrt{k/m}$, $\omega_2 = 1{,}414\sqrt{k/m}$, $1/\mu_1 = 0{,}666\,\ell$, $1/\mu_2 = -0{,}333\,\ell$.

3.E11 Să se calculeze pulsaţiile proprii şi să se traseze formele modurilor proprii ale vibraţiilor cuplate de translaţie şi rotaţie pentru bara rigidă din fig. 3.E11.

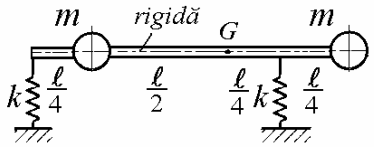


Fig. 3.E11

Răspuns: $\omega_1 = 0{,}78\sqrt{k/m}$, $\omega_2 = 1{,}281\sqrt{k/m}$, $1/\mu_1 = 0{,}64\,\ell$, $1/\mu_2 = -0{,}39\,\ell$.

3.E12 Să se calculeze amplitudinile vibraţiilor forţate ale barei rigide din fig. 3.E12, utilizând următoarele valori numerice: $k = 10^3\ \mathrm{N/m}$, $m = 5\,\mathrm{kg}$, $F_0 = 50\,\mathrm{N}$, $\ell = 0{,}4\,\mathrm{m}$ şi $\omega = 10\ \mathrm{rad/s}$.

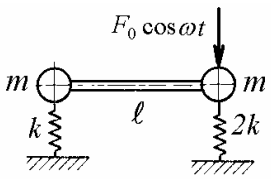


Fig. 3.E12

Răspuns: $A_x = 0{,}0165\ \mathrm{m}$, $A_\theta = 0{,}083\,\mathrm{rad}$.

3.E13 În tabelul alăturat se dau rezultatele unei încercări în regim armonic a unei structuri. Răspunsul a fost măsurat la o oarecare distanță de punctul de aplicație al forței excitatoare şi este dat sub forma valorilor amplitudinii şi unghiului de fază ale receptanței de transfer complexe. Se cere estimarea parametrilor modali: masele modale, rigiditățile modale, rapoartele de amortizare şi coeficienții de amortizare vâscoasă modali.

Frecvența, Hz	Amplitudinea receptanței, 10^{-3} mm/N	Defazajul între răspuns şi forță, grade
40	10	10
41	10,9	30
41,5	10,9	50
41,8	10,4	70
42	9,5	90
42,5	8,4	110
43,5	7,1	130
44	4,9	150
50	3,0	152
60	2,8	160
68	2,0	178
70	6,4	190
72	6,9	210
73	7,2	230
73,5	6,6	250
74	5,5	270
74,5	4,3	290
75	3,0	310
77	1,8	330

Răspuns: $\omega_1 = 263\,\text{rad/s}$, $\zeta_1 = 0{,}0466$, $K_1 = 700\,\text{N/m}$, $C_1 = 0{,}248\,\text{Ns/m}$, $M_1 = 1{,}015\cdot 10^{-2}\,\text{kg}$, $\omega_2 = 462\,\text{rad/s}$, $\zeta_2 = 0{,}0339$, $K_2 = 1800\,\text{N/m}$, $C_2 = 0{,}264\,\text{Ns/m}$, $M_2 = 0{,}84\cdot 10^{-2}\,\text{kg}$.

3.E14 Să se arate că dacă se minimizează *accelerația* masei sistemului primar (în locul deplasării) acționat de o forță armonică de amplitudine constantă, atunci parametrii optimi ai absorbitorului dinamic amortizat au valorile

$$\psi_{opt} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu}}, \qquad \zeta_{2opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu/2)}},$$

$$\left(\frac{m_1\ddot{X}_1}{F_0}\right)_{opt} = \sqrt{\frac{2}{\mu(1+\mu)}}.$$

4.

SISTEME CU MAI MULTE GRADE DE LIBERTATE

Sistemele vibratoare cu două grade de libertate studiate în capitolul precedent reprezintă cazul cel mai simplu şi o introducere în studiul sistemelor cu mai multe grade de libertate. Un sistem are *n* grade de libertate dacă, în orice moment, configurația sa poate fi reprezentată de *n* coordonate independente. Deobicei, în spațiul configurațiilor, coordonatele sunt deplasări liniare sau unghiulare, dar pot fi şi viteze sau accelerații.

Sistemele cu număr finit de grade de libertate sunt *sisteme discrete*. În practica inginerească, vibrațiile sistemelor continue sunt deobicei descrise cu un număr finit de coordonate. Fiecare element al unui sistem discret poate fi el însuşi un sistem continuu, dar frecvențele proprii cele mai joase ale acestuia trebuie să fie mult mai mici decât cele ale sistemului discret idealizat.

Cea mai simplă metodă de discretizare conduce la *sisteme cu parametri concentrați*, constând din mase sau discuri rigide, arcuri şi amortizoare. Proprietățile dinamice ale acestora sunt definite prin mărimi scalare. Elementele deformabile pot fi descrise prin matrici de rigiditate şi de amortizare, care exprimă forțele la extremitățile elementului în funcție de deplasările sau vitezele relative ale extremităților.

Un alt procedeu de discretizare este *metoda elementelor finite.* Aceasta poate fi considerată o metodă Rayleigh-Ritz, în care soluția unei probleme diferențiale de valori proprii, pentru care nu se cunoaşte forma (închisă) exactă, este aproximată printr-o serie finită de *funcții de formă* înmulțite cu coeficienți nedeterminați. În metoda elementelor finite, funcțiile de formă sunt polinoame de grad mic, definite local, iar coeficienții sunt *deplasări nodale* determinate astfel încât să minimizeze câtul lui Rayleigh pentru întregul sistem. Pentru fiecare tip de element finit se definesc matricile elementului care sunt apoi asamblate în matricile globale de masă, de rigiditate şi de amortizare.

Cu ajutorul matricilor globale se scriu ecuațiile diferențiale de mişcare. Căutând soluții armonice sincrone, ecuațiile de mişcare sunt transformate într-un sistem algebric liniar şi omogen, echivalent cu o *problemă de valori proprii*.

Valorile proprii dau *frecvențele proprii* iar vectorii proprii dau *forma modurilor proprii* de vibrație. Frecvențele proprii mai pot fi obținute prin minimizarea câtului lui Rayleigh.

Răspunsul dinamic al unui sistem discret poate fi descris de ecuații diferențiale ordinare simultane. Prin alegerea unui set convenabil de coordonate, numite *coordonate modale* sau *principale*, ecuațiile de mişcare pot fi decuplate şi rezolvate independent. Coordonatele modale reprezintă combinații liniare ale deplasărilor reale. Invers, mişcarea în spațiul configurațiilor poate fi privită ca o suprapunere de vibrații în *modurile naturale* (*proprii*) de vibrație, definite de coordonatele modale. Mişcarea într-un mod propriu de vibrație al unui sistem neamortizat este sincronă şi armonică în toate coordonatele sistemului.

Sistemele cu un număr finit de grade de libertate vibrează simultan în cele câteva moduri naturale, al căror număr este egal cu numărul gradelor de libertate. Pentru a vibra într-un singur mod natural sunt necesare anumite combinații particulare ale condițiilor inițiale ale mişcării sau ale forțelor exterioare aplicate sistemului. În cazul vibrațiilor amortizate, vibrația liberă este dominată doar de câteva moduri cu frecvențe joase, uneori doar de modul fundamental de vibrație, în timp ce vibrația forțată poate fi descrisă de o sumă trunchiată de moduri naturale cu rezonanțe în domeniul frecvențelor de interes, la care se mai adaugă câțiva termeni reziduali datorită modurilor cu frecvențe inferioare sau superioare domeniului de lucru.

Între *sistemele discrete de ordin mic* analizate în acest capitol şi sistemele discrete de ordin mare, tratate într-un alt capitol (volumul 2), nu există diferențe esențiale, cu excepția faptului că rezolvarea problemei de valori proprii a sistemelor mari necesită metode de calcul mai eficiente.

4.1 Sisteme cu mase concentrate

Sistemele vibratoare formate din elemente unidimensionale, de tipul barelor, arborilor sau grinzilor, pot fi modelate prin sisteme simple constând din mase concentrate conectate prin elemente elastice cu masă proprie neglijabilă. Masa distribuită a elementelor elastice este concentrată în puncte alese arbitrar, deobicei echidistante, indiferent de variația amplitudinii vibrației în lungul elementului.

4.1.1 Bare cu mase concentrate

Pe barele cu mase concentrate pot fi ataşate fie mase punctuale, care au deplasări transversale de translație (liniare), fie discuri rigide, care au grade de libertate de translație şi de rotație (liniare şi unghiulare).

4.1.1.1 Deplasări liniare

În fig. 4.1 se prezintă două moduri de discretizare a masei unui element de grindă de secțiune constantă. Modelul lui Duncan (fig. 4.1, *b*) are masa totală concentrată în centrul de greutate. Modelul lui Rayleigh (fig. 4.1, *c*) are câte o jumătate din masa totală concentrată la fiecare extremitate. S-a notat $m_0 = \rho A$ masa pe unitatea de lungime, unde ρ este densitatea materialului şi A este aria secțiunii transversale.

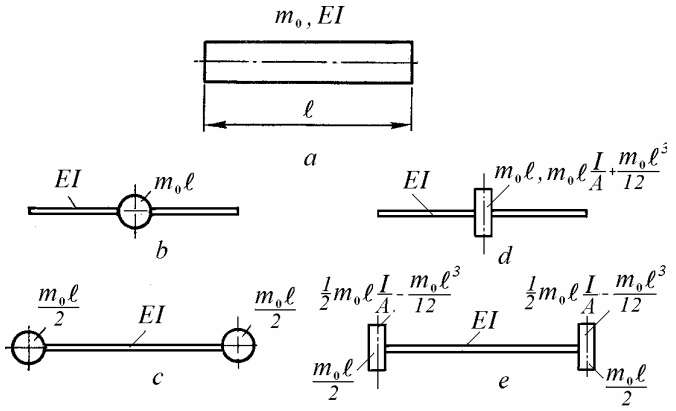


Fig. 4.1

Comparând cele două modele se observă că în modelul lui Duncan se neglijează inerția la rotație față de mijlocul elementului, în timp ce în modelul lui Rayleigh momentul de inerție față de mijloc este $2\frac{m_0\ell}{2}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \neq 0$. Din acest motiv, prin concentrarea masei proprii folosind modelul lui Duncan se obțin în general frecvențe proprii de valori mai mari, în timp ce cu modelul lui Rayleigh se obțin frecvențe proprii mai mici. Diferența valorilor frecvențelor calculate cu cele două modele scade cu creşterea numărului elementelor.

Modelul lui Rayleigh prezintă avantaje în cazul barelor cu secțiune variabilă în trepte, când modulul de rigiditate la încovoiere *EI* variază la capetele elementelor, astfel că între mase modelul cu mase concentrate are porțiuni de secțiune constantă.

Discrepanța valorilor frecvențelor proprii calculate cu modelul lui Rayleigh poate fi ilustrată prin două exemple.

Dacă grinda simplu rezemată din fig. 4.2, *a* este împărțită în două segmente (fig. 4.2, *b*), raportul între pulsația proprie aproximativă şi cea adevărată (5.14), calculată pentru grinda cu masă uniform distribuită, este $\omega_1/\omega_{10} = 0{,}995$.

Dacă grinda este împărțită în patru segmente (fig. 4.2, *c*), sistemul cu trei grade libertate are pulsații proprii $\omega_1/\omega_{10} = 0{,}98$, $\omega_2/\omega_{20} = 0{,}995$ şi $\omega_3/\omega_{30} = 0{,}995$.

La grinda în consolă din fig. 4.3, *a* aproximaarea este mai slabă. La modelul cu un segment (fig. 4.3, *b*), raportul între pulsația proprie şi valoarea adevărată (5.16) este $\omega_1/\omega_{10} = 0{,}7$. Dacă grinda este împărțită în două segmente (fig. 4.3, *c*), raportul primelor pulsații proprii este $\omega_1/\omega_{10} = 0{,}9$. Dacă grinda este împărțită în trei segmente (fig. 4.2, *d*), raportul primelor pulsații proprii este $\omega_1/\omega_{10} = 0{,}95$.

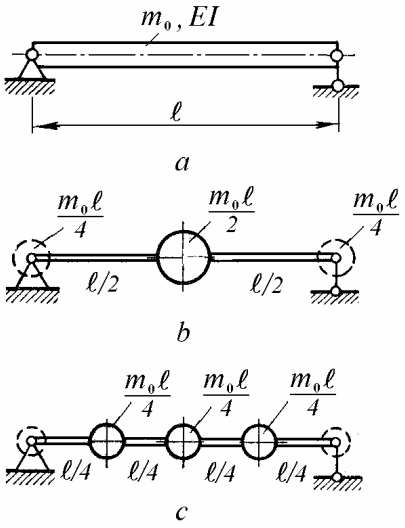


Fig. 4.2

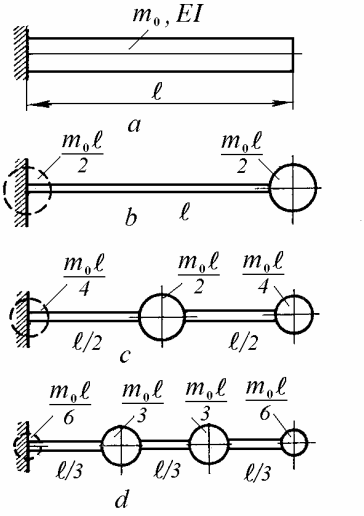


Fig. 4.3

4.1.1.2 Deplasări liniare şi rotiri

O extensie a modelului lui Duncan este prezentată în fig. 4.1, *d*, unde masa şi momentul de inerție masic ale elementului sunt concentrate la mijloc.

Pentru un element de bară cu secțiune constantă, masa totală este

$$m = \rho A \ell = m_0 \ell\,, \tag{4.1}$$

iar momentul de inerție masic total este

$$J = \frac{m_0 \ell^3}{12} + m_0 \ell \frac{I}{A} = \frac{\rho A \ell^3}{12} + \rho \ell I\,, \tag{4.2}$$

unde I este momentul de inerție axial al secțiunii transversale.

Pentru un element cilindric de bară, de diametru *d* şi lungime ℓ ,

$$J = \frac{m_0 \ell}{12}\left(\frac{3d^2}{4} + \ell^2\right). \tag{4.3}$$

Momentul de inerție masic total (4.2) se compune din două părți. Prima parte, $m\ell^2/12$, se datoreşte masei distribuite în lungul elementului la nivelul axei neutre. Partea a doua, "inerția la rotație" $\rho \ell I$, se datoreşte faptului că masa este distribuită şi în afara axei neutre. Aceasta nu ia parte la translație, fiind activată doar de rotire.

În extensia modelului lui Rayleigh (fig. 4.1, *e*), câte o jumătate din masa totală şi un moment de inerție masic negativ sunt concentrate la cele două capete. Prin această distribuție se conservă masa şi momentul de inerție masic total față de mijlocul elementului. Verificarea se poate face utilizând teorema Huygens-Steiner pentru axe paralele

$$J = 2\left(\frac{m_0 \ell}{2}\frac{\ell^2}{4} - \frac{m_0 \ell^3}{12}\right) = \frac{m_0 \ell^3}{12}.$$

Distincția de mai sus este utilă în analiza cu elemente finite. Se lucrează cu două matrici de inerție diagonale ale elementului: una pentru inerția la translație

$$\left[m_t^e\right] = m_0 \ell \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\ell^2/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\ell^2/12 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

şi una pentru inerția la rotație

$$\left[m_r^e\right] = m_0 \ell \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i^2 \end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

unde $i = \sqrt{I/A}$.

4.1.1.3 Coeficienți de flexibilitate

Aşa cum s-a arătat în §3.3, ecuațiile de mişcare ale sistemelor cu mase concentrate solicitate la încovoiere se scriu mai uşor utilizând coeficienți de flexibilitate decât rigidități.

Dacă deplasările maselor concentrate sunt alese coordonatele care definesc mişcarea sistemului, atunci vectorul deplasărilor $\{y\}$ este legat de vectorul forțelor aplicate maselor $\{f\}$ prin matricea de flexibilitate $[\delta]$ ca în ecuația (3.78)

$$\{y\}=[\delta]\{f\}. \tag{4.6}$$

Ecuația de mişcare pentru vibrațiile libere (3.82) se poate scrie

$$[\delta][m]\{\ddot{y}\}+\{y\}=\{0\}. \tag{4.7}$$

Problema de valori proprii corespunzătoare (3.85) este

$$\left([\delta][m]-\frac{1}{\omega^2}[I]\right)\{a\}=\{0\}. \tag{4.8}$$

Din condiția de a avea soluții nebanale se obține ecuația pulsațiilor

$$\det\left([\delta][m]-\frac{1}{\omega^2}[I]\right)=0 \tag{4.9}$$

ale cărei soluții sunt pulsațiile proprii ale sistemului ω_r.

Forma modurilor proprii este definită de vectorii modali $\{a\}_r$, care satisfac sistemul de ecuații algebrice liniare şi omogene

$$\left([\delta][m]-\frac{1}{\omega_r^2}[I]\right)\{a\}_r=\{0\}. \tag{4.10}$$

Exemplul 4.1

Să se calculeze pulsațiile proprii ale vibrațiilor transversale ale barei cu trei mase din fig. 4.4, *a*, unde $EI = const$.

Rezolvare. Utilizând fig. 4.4, *b*, săgeata produsă în secțiunea *x* de o forță concentrată *F* aplicată la distanța *b* de capătul din dreapta, are expresia

$$v(x)=\frac{Fbx}{6EI\ell}\left(\ell^2-x^2-b^2\right).$$

Coeficienții de flexibilitate sunt

$$\delta_{ij}=\frac{b_j x_i}{6EI\ell}\left(\ell^2-x_i^2-b_j^2\right).$$

Deoarece $x_1=b_3=\ell/4$, $x_2=b_2=\ell/2$, $x_3=b_1=3\ell/4$, matricea de flexibilitate este

$$[\delta]=\frac{\ell^3}{768EI}\begin{bmatrix}9 & 11 & 7\\ 11 & 16 & 11\\ 7 & 11 & 9\end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

Ecuația (4.8) poate fi scrisă

$$\begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

unde

$$\lambda = 768\,EI \big/ m\ell^3\omega^2 \ .$$

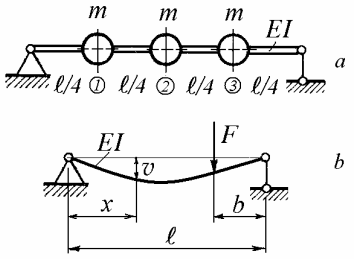


Fig. 4.4

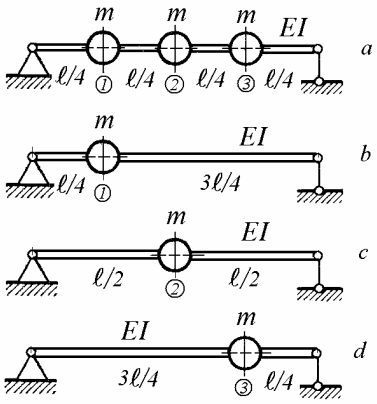


Fig. 4.5

Ecuația pulsațiilor proprii este

$$\lambda^3 - 34\lambda^2 + 78\,\lambda - 28 = 0 \ ,$$

având rădăcinile

$$\lambda_1 = 31{,}5563 \ , \qquad \lambda_2 = 2 \ , \qquad \lambda_3 = 0{,}4436 \ .$$

Pulsațiile proprii sunt

$$\omega_1 = 4{,}933\sqrt{EI \big/ m\ell^3} \ , \ \omega_2 = 19{,}596\sqrt{EI \big/ m\ell^3} \ , \ \omega_3 = 41{,}606\sqrt{EI \big/ m\ell^3} \ .$$

Vectorii modali sunt

$$\{a\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}4142 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{a\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad \{a\}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1{,}4142 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

4.1.1.4 Formula lui Dunkerley

La multe sisteme, frecvențele proprii ale modului al doilea şi modurilor superioare de vibrație sunt adesea mult mai mari decât frecvența proprie a primului mod de vibrație. Aceasta permite estimarea frecvenței proprii fundamentale cu ajutorul unor formule simple.

Ecuația algebrică

$$\alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + ... + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n = 0$$

are suma rădăcinilor

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}.$$

Pentru ecuația pulsațiilor (5.9), se poate scrie

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\omega_i^2} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ii} m_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\omega_{ii}^2},$$

unde ω_{ii}^2 este pătratul pulsației proprii "izolate" a sistemului care conține doar masa m_i. Această pulsație se calculează pe baza deformatei elastice exacte a sistemului cu o singură masă care are aceeaşi configurație ca sistemul analizat cu excepția maselor eliminate.

Deoarece $\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n$, toți termenii cu excepția primului pot fi neglijați în prima sumă, rezultând o formulă din care se obține o valoare aproximativă a pulsației proprii fundamentale

$$\frac{1}{\omega_1^2} \cong \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\omega_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\omega_{ii}^2},$$

sau

$$\frac{1}{\omega_1^2} \cong \frac{1}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\omega_{22}^2} + \frac{1}{\omega_{33}^2} + \ldots \qquad (4.12)$$

Astfel, inversul pătratului pulsației proprii fundamentale se poate obține însumând inversele pătratelor pulsațiilor izolate. Ecuația (4.12) este cunoscută ca *formula lui Dunkerley*. Ea a fost stabilită experimental şi publicată de S. Dunkerley (1895) apoi justificată teoretic de R. V. Southwell (1921).

Formula permite estimarea pulsației proprii fundamentale a unui sistem fără rezolvarea problemei de valori proprii. Ea se aplică doar sistemelor fixate de un reper fix, deci nu poate fi aplicată în cazul sistemelor libere (fără legături). În general, valorile aproximative ale pulsației obținute cu formula lui Dunkerley sunt mai mici decât cele adevărate.

La grinda în consolă din fig. 4.3, *a* pulsația proprie fundamentală (5.16) este $\omega_{10} = 3{,}52\sqrt{EI/m\ell^3}$. La modelul cu un segment (fig. 4.3, *b*), pulsația proprie este $\omega_1 = 2{,}44\sqrt{EI/m\ell^3}$, cu $30{,}7\%$ mai mică decât valoarea adevărată. Când bara este împărțită în două segmente (fig. 4.3, *c*), prima pulsație proprie este $\omega_1 = 3{,}098\sqrt{EI/m\ell^3}$, cu 12% mai mică decât cea adevărată. Când bara este împărțită în trei segmente (fig. 4.2, *d*), prima pulsație proprie este $\omega_1 = 3{,}286\sqrt{EI/m\ell^3}$, cu $7{,}12\%$ mai mică, iar când este împărțită în patru segmente, cu $4{,}5\%$ mai mică decât pulsația adevărată.

Exemplul 4.2

Să se calculeze pulsația proprie fundamentală a vibrațiilor transversale ale barei cu trei mase din Exemplul 4.1 (fig. 4.5, *a*) utilizând formula lui Dunkerley.

Rezolvare. Din matricea de flexibilitate (4.11) rezultă

$$\delta_{11} = \delta_{33} = \frac{9\ell^3}{768EI}, \qquad \delta_{22} = \frac{16\ell^3}{768EI}.$$

Pentru sistemele cu un grad de libertate cu mase izolate (fig. 4.5, *b*, *c*, *d*), pătratele pulsațiilor proprii sunt respectiv

$$\omega_{11}^2 = \frac{1}{m\delta_{11}} = \frac{768EI}{9m\ell^3},$$

$$\omega_{22}^2 = \frac{1}{m\delta_{22}} = \frac{768EI}{16m\ell^3},$$

$$\omega_{33}^2 = \frac{1}{m\delta_{33}} = \frac{768EI}{9m\ell^3},$$

astfel că formula lui Dunkerley (4.12) se scrie

$$\frac{1}{\omega_1^2} \cong \frac{1}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\omega_{22}^2} + \frac{1}{\omega_{33}^2} = \frac{9m\ell^3}{768EI} + \frac{16m\ell^3}{768EI} + \frac{9m\ell^3}{768EI} = \frac{34m\ell^3}{768EI}.$$

Rezultă pulsația proprie fundamentală

$$\omega_1 \cong 4{,}7527\sqrt{EI/m\ell^3},$$

care este cu 3,6% mai mică decât valoarea adevărată calculată în Exemplul 4.1.

4.1.1.5 Formula lui Rayleigh

Pentru o bară reprezentată printr-un model cu mase concentrate, având masele $m_i \quad (i = 1,...,n)$ ataşate în punctele de abscisă x_i de o bară cu masa neglijabilă, formula lui Rayleigh devine

$$\omega_1^2 = \frac{\int EI \left(\partial^2 v / \partial x^2\right)^2 dx}{\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2}, \tag{4.13}$$

unde $v_i = v\left(x_i\right)$ sunt săgeţile statice în punctele de ataşare a maselor.

Dacă energia de deformaţie se calculează pe baza lucrului mecanic efectuat de greutăţile $m_i g$, atunci $U_{max} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i g \cdot v_i$ astfel că formula lui Rayleigh (4.13) devine

$$\omega_1^2 = \frac{g \sum_{i=1}^{n} m_i v_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2}, \tag{4.14}$$

unde *g* este acceleraţia gravitaţiei.

Aşa cum s-a arătat în §2.1.5, dacă se utilizează deformata adevărată a sistemului vibrator, atunci pulsaţia proprie fundamentală obţinută cu ajutorul formulei lui Rayleigh va fi valoarea adevărată. Pentru orice altă curbă, pulsaţia determinată prin această metodă va fi mai mare decât pulsaţia adevărată.

Dacă se doreşte o precizie mai mare, o aproximare mai bună a curbei care defineşte deformata dinamică se poate obţine utilizând sarcini dinamice în locul greutăţilor statice. Deoarece sarcina dinamică este $m_i \omega^2 v_i$, fiind proporţională cu săgeata, se poate recalcula săgeata produsă de greutăţile modificate $m_1 g$, $m_2 g \frac{v_2}{v_1}$, $m_3 g \frac{v_3}{v_1}$.

Exemplul 4.3

Să se calculeze pulsaţia proprie a vibraţiilor transversale ale barei cu trei mase din Exemplul 4.1 (fig. 4.4, *a*) folosind formula lui Rayleigh (4.14).

Rezolvare. Utilizând coeficienţii de flexibilitate şi principiul suprapunerii efectelor, deplasarea oricărei mase se poate calcula ca suma produselor între coeficienţii de flexibilitate din secţiunea respectivă şi greutăţile corespunzătoare.

Ecuația (4.6) se poate scrie

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [\delta] \begin{Bmatrix} mg \\ mg \\ mg \end{Bmatrix} = mg [\delta] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

de unde rezultă

$$v_1 = mg\left(\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13}\right) = \frac{27\ell^3}{768EI} mg\,,$$

$$v_2 = mg\left(\delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23}\right) = \frac{38\ell^3}{768EI} mg\,,$$

$$v_3 = v_1\,.$$

Înlocuind în formula (4.14), se obține

$$\omega_1^2 = \frac{768EI}{m\ell^3} \frac{27 + 38 + 27}{27^2 + 38^2 + 27^2} = \frac{768EI}{9m\ell^3} \frac{92}{2902} = \frac{768}{31{,}54348} \frac{EI}{m\ell^3}$$

sau

$$\omega_1 = 4{,}9343\sqrt{EI/m\ell^3}\,,$$

valoare cu numai 0,02% mai mare decât cea adevărată, calculată în Exemplul 4.1.

Dacă $m = m_0\ell/4$, atunci sistemul din fig. 4.4, *a* este identic cu bara din fig. 4.2, *c*. Înlocuind această valoare în formula de mai sus rezultă

$$\omega_1 = 4{,}9343 \cdot 2\sqrt{\frac{EI}{m_0\ell^4}} = \frac{9{,}8686}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m_0}}\,,$$

care este mai mică decât pulsația (5.14) obținută pentru o bară cu masa distribuită

$$\omega_{adev} = \frac{\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m_0}} = \frac{9{,}8696}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m_0}}\,,$$

datorită procesului de concentrare în care nu s-a conservat masa totală.

4.1.2 Structuri multietajate forfecate

O clădire "forfecată" este o structură cu planşee rigide nedeformabile care au doar mişcări de translație orizontală. Deformarea clădirii se aseamănă cu cea produsă doar de forțele tăietoare într-o gridă în consolă; de aici numele de *clădire forfecată*.

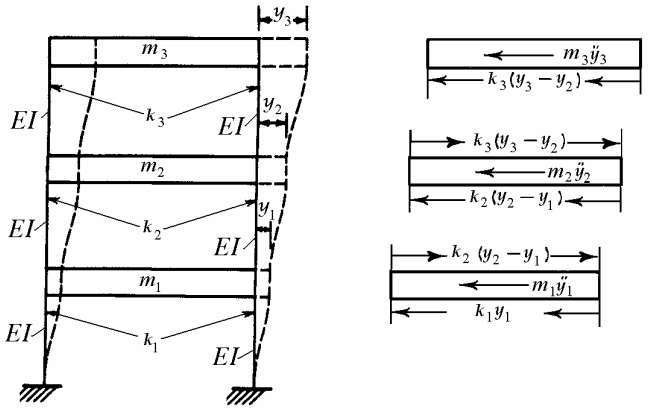
În fig. 4.6, *a* se prezintă o clădire forfecată cu trei nivele, cu stâlpi flexibili şi rigle rigide, modelată ca un cadru plan cu trei grade de libertate. Se consideră doar vibrația cadrului în planul său, datorită încovoierii stâlpilor în planul cadrului.

Pentru a se realiza o astfel de deformație într-o clădire, se fac următoarele ipoteze simplificatoare: a) toate planşeele sunt rigide şi se pot mişca doar pe orizontală, astfel că în îmbinările între rigle şi stâlpi nu apar rotiri relative; b) toți stâlpii sunt inextensibili şi cu masă neglijabilă; şi c) masa clădirii este concentrată la nivelul planşeelor, astfel încât vibrația clădirii multietajate se reduce la vibrația unui sistem cu număr finit de grade de libertate.

Forfecarea este modelată convenabil prin deplasările orizontale relative ale planşeelor. Deplasării unui element orizontal i se opune o forță de readucere elastică datorită încovoierii stâlpilor. Dacă aceştia sunt modelați ca bare cu secțiune constantă, cu încastrări mobile la ambele capete, se poate arăta că rigiditatea combinată la încovoiere a stâlpilor de la un nivel este

$$k = \frac{12\,E \cdot 2I}{\ell^3} = \frac{24EI}{\ell^3}, \tag{4.15}$$

unde EI este modulul de rigiditate la încovoiere al stâlpului şi ℓ - înălțimea etajului (lungimea stâlpului).



a *b*

Fig. 4.6

Ecuațiile de mişcare se pot obține, folosind principiul lui d'Alembert şi diagramele forțelor din fig. 4.6, *b,* egalând cu zero suma forțelor care acționează asupra fiecărei mase. Metoda este expusă pentru sisteme cu două grade de libertate în § 3.1.1.

4.1.3 Sisteme torsionale

Vibraţiile torsionale ale arborilor cotiţi ai motoarelor şi compresoarelor se studiază utilizând un sistem simplificat cu parametri concentraţi (fig. 4.7). Acesta se obţine concentrând momentele de inerţie ale maselor în rotaţie şi în translaţie din fiecare mecanism bielă-manivelă în discuri rigide situate în dreptul cilindrilor, în lungul unui arbore principal echivalent. Volantul, amortizorul torsional, cuplajul şi rotorul maşinii antrenate sau elicea pot fi de asemenea modelate ca discuri rigide.

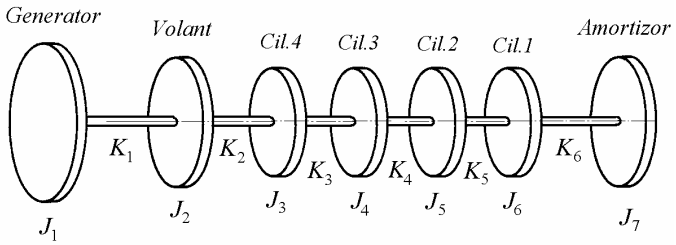


Fig. 4.7

Biela este înlocuită cu un sistem dinamic echivalent cu două mase concentrate, una la capătul din maneton, cealaltă la capătul din axul pistonului.

În fiecare cilindru există o masă în translaţie, m_{tr}, care constă din masa pistonului şi masa redusă a bielei, şi o masă în rotaţie, care constă din masa manivelei, contragreutatea şi masa redusă a bielei, care are un moment de inerţie masic J_{rot}. Valoarea medie a momentului de inerţie pentru fiecare cilindru este

$$J = J_{rot} + \frac{1}{2} m_{tr} r^2 ,$$

unde *r* este raza manivelei.

Rigiditatea torsională a arborelui cotit dintre doi cilindri, care provine din efectul combinat al răsucirii fusului maneton şi încovoierii braţului manivelei, poate fi aproximată numeric sau măsurată experimental. La fel se poate estima rigiditatea arborelui cotit între ultimul cilindru şi volant, cea a cuplajului şi a arborelui antrenat. Tot sistemul poate fi apoi redus la un model torsional cu o serie de discuri rigide conectate prin arbori elastici de masă neglijabilă, ca în fig. 4.7.

Exemplul 4.4

Un motor diesel cuplat cu un generator electric este redus la sistemul echivalent din fig. 4.8, unde valorile J sunt date în $\mathrm{kg \cdot m^2}$, iar valorile K în 10^6 x Nm/rad: $J_1 = 11{,}863$, $J_2 = 2{,}011$, $J_3 = J_4 = J_5 = J_6 = 0{,}167$, $J_7 = 0{,}897$, $K_1 = 1{,}062$, $K_2 = 6{,}101$, $K_3 = K_4 = K_5 = 3{,}05$, $K_6 = 4{,}067$. Să se calculeze

primele două pulsații proprii ale vibrațiilor torsionale şi să se deseneze forma modurilor respective de vibrație.

Rezolvare. $\omega_1 = 552$ rad/s, $\omega_2 = 1145$ rad/s. Formele modale sunt prezentate în fig. 4.8.

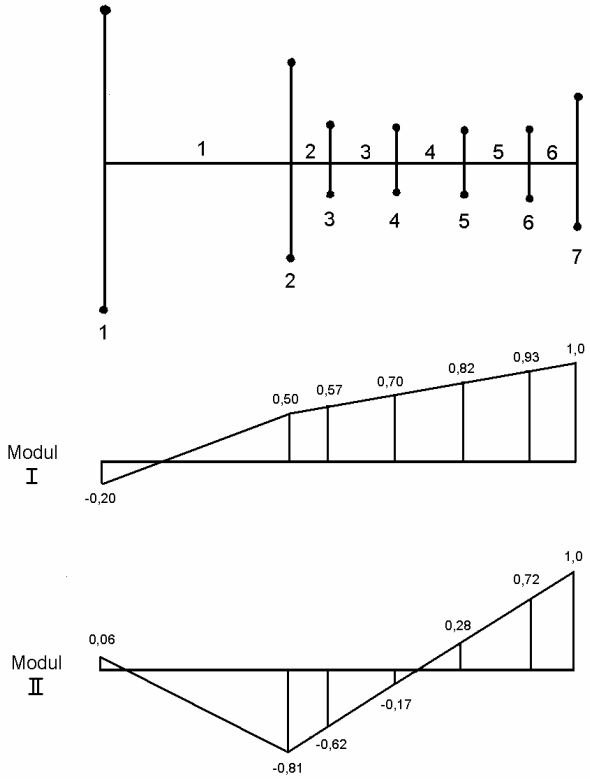


Fig. 4.8

Sisteme torsionale cu roți dințate

Sistemele cu roți dințate şi ansamblul motor-cutie de viteze al autovehiculelor se modelează similar. Sistemele torsionale ramificate cu roți dințate pot fi modelate ca în § 3.2.4. Este convenabilă utilizarea unui sistem echivalent fără roți dințate (sau cu roți dințate cu raport de transmisie egal cu 1) care are aceleaşi frecvențe proprii ca sistemul original. Acest lucru este posibil deoarece, deşi roțile dințate modifică turația prin raportul de transmisie, vibrațiile se transmit prin roțile dințate fără o modificare a frecvenței, ci doar a amplitudinii.

În § 3.2.4, sistemul real cu ramuri având diferite turații a fost redus la un sistem echivalent în care toate componentele au aceeaşi turație, deobicei turația

arborelui de referinţă. Pornind de la acest arbore spre altă ramură printr-un angrenaj cu raportul de transmisie *i*, valorile reale *J* şi *K* sunt înmulţite cu i^2. Dacă se trece prin mai multe angrenaje, valorile următoare *J* şi *K* se înmulţesc cu pătratele rapoartelor de transmisie respective. Pentru o pereche de roţi în angrenare, momentul de inerţie total se calculează adunând la momentul de inerţie al roţii de referinţă, momentul de inerţie al roţii dinţate reduse înmulţit cu i^2.

Modelul echivalent astfel obţinut are aceleaşi frecvenţe proprii ca sistemul real şi aceleaşi poziţii ale punctelor nodale. Totuşi, în ramurile reduse, amplitudinea deplasărilor unghiulare se împarte la $-i$, în timp ce momentul de torsiune în ramura redusă este înmulţit cu $-i$.

În continuare se prezintă o metodă de calcul mai simplă. În modelul echivalent, arborii şi discurile au turaţia reală, şi doar roata dinţată antrenată este condensată.

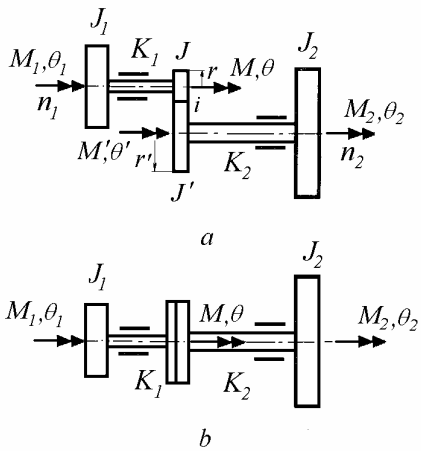


Fig. 4.9

În fig. 4.9, *a* între arborele conducător *1* şi arborele condus *2* există un angrenaj cilindric, roţile dinţate având momentele de inerţie masice J, J' şi razele r şi r'. În figură s-au notat rigidităţile arborilor K_1 şi K_2, momentele de inerţie ale discurilor J_1 şi J_2, deplasările unghiulare şi cuplurile care acţionează asupra discurilor.

Mişcarea sistemului este descrisă de patru cupluri şi patru deplasări unghiulare. Totuşi doar trei dintre fiecare din acestea sunt independente, datorită condiţiilor de compatibilitate între roţile în contact. Astfel este util să se considere cuplul M' şi deplasarea unghiulară θ' drept variabile dependente. Prin eliminarea

acestora se obține modelul echivalent din fig. 4.9, *b* în care arborele conducător *1* este ales arbore de referință.

Condiția de compatibilitate a deplasărilor unghiulare este

$$r\,\theta = -r'\,\theta' ,$$

iar condiția de compatibilitate a cuplurilor se scrie

$$\frac{M}{r} = -\frac{M'}{r'} \qquad \text{sau} \qquad M\,\theta = M'\,\theta' .$$

Raportul de transmisie este

$$i = -\frac{n_2}{n_1} = \frac{r}{r'} = -\frac{\theta'}{\theta} = -\frac{M}{M'} . \tag{4.16}$$

În sistemul original, matricea de rigiditate a arborelui *2* este definită de

$$\begin{Bmatrix} M' \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta' \\ \theta_2 \end{Bmatrix} .$$

Utilizând transformările bazate pe relațiile (4.16),

$$\begin{Bmatrix} M \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M' \\ M_2 \end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} \theta' \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \theta_2 \end{Bmatrix},$$

matricea de rigiditate a arborelui *2* în modelul echivalent este definită astfel

$$\begin{Bmatrix} M \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \theta_2 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} M \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} i^2 K_2 & i\,K_2 \\ i\,K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \theta_2 \end{Bmatrix} .$$

Matricea de masă este definită asemănător

$$\begin{Bmatrix} M \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J' & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} M \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} i^2 J' & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} .$$

În continuare, ansamblul format din două discuri şi arborele elastic dintre ele este considerat un element finit. Pentru un element al arborelui condus se definesc matricile

$$\left[k^e\right]=\begin{bmatrix} i^2K_e & iK_e \\ iK_e & K_e \end{bmatrix} \quad , \quad \left[m^e\right]=\begin{bmatrix} i^2J'_e & 0 \\ 0 & J_e \end{bmatrix} \quad . \tag{4.17}$$

Matricile unui element al arborelui *1* din fig.5.9 sunt

$$\left[k^1\right]=\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \quad , \quad \left[m^1\right]=\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \quad .$$

Acestea se pot obține din expresiile generale (4.17) înlocuind $i=-1$. În general, pentru elemente care nu sunt situate în vecinătatea roților dințate, unul din momentele de inerție de la capete este nul.

O altă metodă constă din condensarea matricilor sistemului pe baza ecuațiilor de compatibilitate a deplasărilor unghiulare ale roților dințate în contact.

Exemplul 4.5

Sistemul ramificat cu roți dințate din fig. 4.10, *a* constă din trei discuri rigide cu momente de inerție J_1, J_5 şi J_6 şi trei roți dințate rigide de raze r, $r/2$ şi $r/3$, cu momente de inerție masice J_2, J_3 şi J_4, conectate prin trei arbori cu rigidități torsionale K_1, K_2 şi K_3. Să se stabilească ecuațiile vibrațiilor libere de torsiune.

Rezolvare. În ramura superioară, raportul de transmisie este $i=-2$. În ramura inferioară, raportul de transmisie este $i=-3$. Pentru sistemul echivalent prezentat în fig. 4.10, *b* matricile elementelor se calculează cu relațiile (4.17).

Matricile globale se asamblează utilizând metoda directă a rigidității rezultând

$$\left[K\right]=\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1+4K_2+9K_3 & -2K_2 & -3K_3 \\ 0 & -2K_2 & K_2 & 0 \\ 0 & -3K_3 & 0 & K_3 \end{bmatrix}$$

şi

$$\left[M\right]=\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2+4J_3+9J_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_6 \end{bmatrix}.$$

Vectorul global al deplasărilor unghiulare este

$$\{\Theta\}=\{\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4\}^T.$$

Ecuațiile de mișcare se scriu sub forma

$$[M]\{\ddot{\Theta}\}+[K]\{\Theta\}=\{0\}.$$

În continuare, matricile globale se notează cu litere mari şi nu trebuie confundate cu matricile modale.

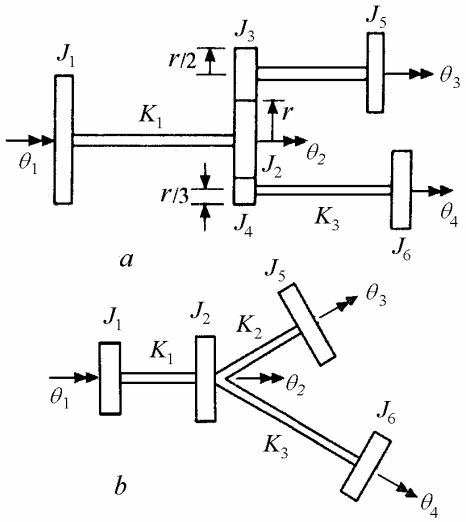


Fig. 4.10

În fig. 4.10 se prezintă modelul simplificat al sistemului de propulsie al unei nave, cu elicea J_1 antrenată de o turbină de joasă presiune J_5 şi o turbină de înaltă presiune J_6.

Pulsațiile proprii calculate sunt comparate cu pulsațiile perturbatoare. Deobicei excitația principală este variația cuplului aplicat elicei, datorită variației forțelor produse de apă asupra palelor în rotație. Această perturbație are loc la *frecvența palelor,* egală cu *frecvența elicei* (o dată pe rotație) înmulțită cu numărul palelor.

Exemplul 4.6

Sistemul torsional ramificat cu roți dințate din fig. 4.11 are următorii parametri: $J_1=950$, $J_2=542$, $J_3=406{,}7$, $J_4=J_5=6{,}78$, $J_7=13{,}55$, $J_6=J_8=J_9=27{,}12$ $\left[\text{kg}\cdot\text{m}^2\right]$, $i=-76/24$, $K_1=20{,}336\cdot10^6$, $K_2=8{,}135\cdot10^6$,

$K_3 = 1{,}22 \cdot 10^6$, $K_4 = 0{,}407 \cdot 10^6$, $K_5 = 1{,}63 \cdot 10^6$, $K_6 = 2{,}44 \cdot 10^6$ $\left[\text{Nm/rad}\right]$. Să se calculeze frecvențele proprii ale vibrațiilor torsionale.

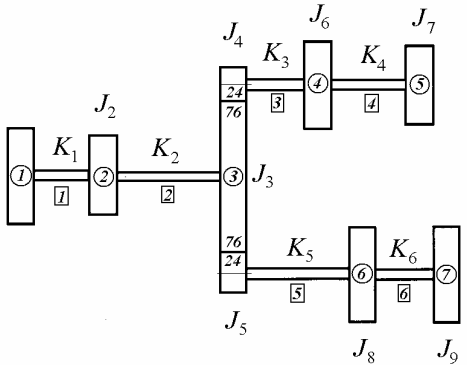


Fig. 4.11

Rezolvare. Sistemul real este redus la un model echivalent în care cele două pinioane sunt condensate. Matricile elementelor (4.17) se calculează pentru fiecare segment, apoi sunt asamblate în matricile globale de masă şi de rigiditate.

Matricea de rigiditate globală este

$$\left[K\right] = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2+i^2K_3+i^2K_5 & iK_3 & 0 & iK_5 & 0 \\ 0 & 0 & iK_3 & K_3+K_4 & -K_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_4 & K_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iK_5 & 0 & 0 & K_5+K_6 & -K_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_6 & K_6 \end{bmatrix}$$

Matricea de masă globală este

$$\left[M\right] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3+i^2J_4+i^2J_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_9 \end{bmatrix}$$

Frecvențele proprii au următoarele valori: $f_1 = 0$, $f_2 = 14{,}26$, $f_3 = 22{,}98$, $f_4 = 35{,}34$, $f_5 = 41{,}98$, $f_6 = 50{,}52$, $f_7 = 75{,}17$ Hz.

4.1.4 Structuri (cu subsisteme) repetate

Sistemele vibratoare sunt adesea formate din subsisteme cu aceeaşi configurație care se repetă în spațiu. Exemplele prezentate în fig. 4.12 includ o clădire forfecată cu 5 nivele, un sistem cu 6 mase concentrate cu mișcare de translație şi un sistem torsional cu 7 discuri. La aceste sisteme calculul frecvențelor proprii se poate face utilizând metoda ecuațiilor cu diferențe.

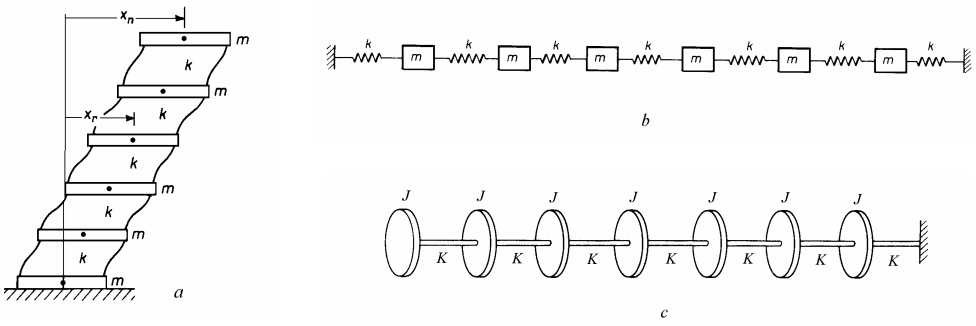


Fig. 4.12

Ecuația de mişcare a masei *r* (fig. 4.12, *a*) este

$$m\ddot{x}_r + k\left(x_r - x_{r-1}\right) - k\left(x_{r+1} - x_r\right) = 0$$

care, în cazul mişcării armonice $x_r = a_r \sin \omega t$, poate fi exprimată în funcție de amplitudini sub forma

$$a_{r+1} - 2\left(1 - \frac{\omega^2 m}{2k}\right)a_r + a_{r-1} = 0\,.$$

Soluția acestei ecuații se obține înlocuind

$$a_r = e^{i\beta r}\,,$$

ceea ce conduce la ecuația

$$\left(1 - \frac{\omega^2 m}{2k}\right) = \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2} = \cos\beta\,,$$

care mai poate fi scrisă

$$\frac{\omega^2 m}{k} = 2\left(1-\cos\beta\right) = 4\sin^2\frac{\beta}{2}. \qquad (4.18)$$

Soluția generală pentru a_r este

$$a_r = C_1\,\cos\beta r + C_2\,\sin\beta r\,,$$

unde C_1 şi C_2 se determină din condițiile la limită. La $r=0$ amplitudinea este zero $a_0 = 0$, deci $C_1 = 0$. La capătul liber, $r = n$, ecuația de mişcare este

$$m\ddot{x}_n + k\left(x_n - x_{n-1}\right) = 0$$

care, exprimată în amplitudini, devine

$$a_{n-1} = \left(1 - \frac{\omega^2 m}{k}\right) a_n\,.$$

Înlocuind soluția generală, se obține următoarea ecuație pentru evaluarea lui β :

$$\sin\beta\left(n-1\right) = \left[1 - 2\,\left(1-\cos\beta\,\right)\right]\,\sin\beta n\,.$$

Acest rezultat se poate rescrie sub formă de produs

$$2\cos\beta\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2} = 0\ ,$$

ecuație satisfăcută de

$$\sin\frac{\beta}{2} = 0\ ,$$

şi de

$$\cos\beta\left(n+\frac{1}{2}\right) = 0\,, \quad \text{sau} \quad \frac{\beta}{2} = \frac{\left(2r-1\right)\pi}{2\left(2n+1\right)}. \qquad \left(r = 1,\ldots,n\right)$$

Pulsațiile proprii se obțin din ecuația (4.18) sub forma

$$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin\frac{\beta}{2} \qquad (4.19)$$

care conduce la expresia

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin\frac{\left(2r-1\right)\pi}{2\left(2n+1\right)}. \qquad \left(r = 1,\ldots,n\right) \qquad (4.20)$$

Pulsațiile proprii calculate cu metoda ecuației cu diferențe sunt date de relația generală (4.19). Totuşi, pentru fiecare structură cu subsisteme repetate, parametrul β trebuie determinat pe baza condițiilor la limită respective.

4.1.5 Sisteme discrete cu mai multe mase

Într-un sistem vibrator unidimensional, fiecare masă se mişcă într-o singură direcție. În dreptul fiecărei mase concentrate se poziționează câte un nod, fiecare nod având un singur grad de libertate. La marginile fixe se poziționează un nod blocat.

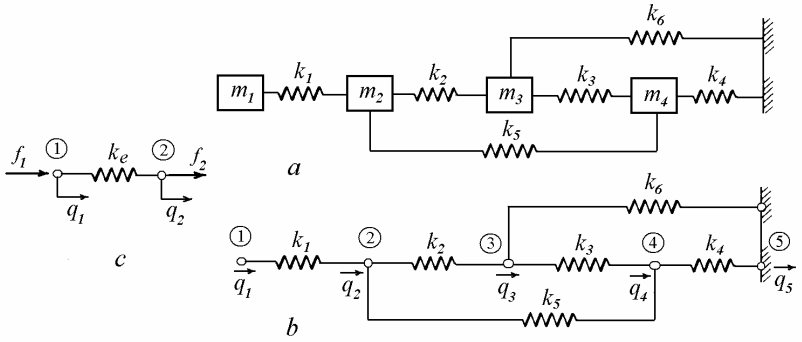


Fig. 4.13

Modelul cu patru mase din fig. 4.13, *a* are patru grade de libertate şi cinci noduri. Deplasările nodale se notează $q_1, q_2, \ldots, q_5$ (fig. 4.13, *b*). Vectorul coloană $\{\overline{Q}\} = \{q_1, q_2, \ldots, q_5\}^T$ se numeşte *vectorul global al deplasărilor nodale* iar $\{\overline{F}\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_5\}^T$ este *vectorul global al forțelor nodale*. Deplasările şi forțele sunt pozitive când sunt orientate în sensul pozitiv al direcției q. Condiția la limită $q_5 = 0$ încă nu este utilizată.

Tabelul 4.1

Elementul	Nodul	
	1	2
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	2	4
6	3	5

Cele şase arcuri sunt numerotate cu indicele rigidității respective. Fiecare arc are două noduri. Informația privind conectivitatea elementelor se prezintă convenabil ca în Tabelul 4.1. În acest tabel de conectivitate, indicii locali ai nodurilor sunt *1* şi *2*, iar indicii globali sunt *i* şi *j*.

Cu notația din fig. 4.13, *c*, vectorul forțelor nodale locale $\{f^e\}=\{f_1,\ f_2\}^T$ poate fi exprimat în funcție de vectorul deplasărilor nodale locale $\{q^e\}=\{q_1,\ q_2\}^T$ prin ecuația $\{f^e\}=[k^e]\{q^e\}$ în care matricea de rigiditate a elementului este

$$[k^e]=\begin{bmatrix} k_e & -k_e \\ -k_e & k_e \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

Aceasta poate fi obținută din ecuațiile de echilibru şi relațiile forță-deformație: pentru $q_2=0$, $f_1=-f_2=k\,q_1$, iar pentru $q_1=0$, $f_1=-f_2=-k\,q_2$.

Pe de altă parte, vectorul global al forțelor nodale $\{\overline{F}\}$ este exprimat în funcție de vectorul global al deplasărilor nodale $\{\overline{Q}\}$ prin ecuația $\{\overline{F}\}=[\overline{K}]\{\overline{Q}\}$ în care $[\overline{K}]$ este matricea de rigiditate globală neredusă.

Matricea $[\overline{K}]$ poate fi obținută prin *metoda directă a rigidității*. Utilizând informația privind conectivitatea arcurilor, elementele fiecărei matrici $[k^e]$ sunt plasate în poziția corespunzătoare din matricea de ordin mai mare $[\overline{K}]$ iar elementele din aceeaşi poziție sunt însumate.

Procesul de asamblare a matricii de rigiditate globale poate fi explicat prin însumarea energiilor de deformație ale elementelor.

De exemplu, energia de deformație în arcul *3* este

$$U_3=\frac{1}{2}\{q^3\}^T[k^3]\{q^3\}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} q_3 & q_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}.$$

Expandând matricea de rigiditate a arcului 3 la dimensiunea sistemului, se obține

$$U_3=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\{\overline{Q}\}^T[\widetilde{k}^3]\{\overline{Q}\},$$

unde $\left[\widetilde{k}^3\right]$ este matricea de rigiditate expandată a arcului *3*.

Se observă că elementele matricii $\left[\widetilde{k}^3\right]$ sunt plasate în liniile şi coloanele trei şi patru ale matricii $\left[\overline{K}\right]$. La însumarea energiilor de deformație ale arcurilor

$$U=\sum_e U_e=\frac{1}{2}\left\{\overline{Q}\right\}^T\left[\overline{K}\right]\left\{\overline{Q}\right\},$$

elementele matricii $\left[k^e\right]$ sunt plasate în pozițiile corespunzătoare din matricea globală $\left[\overline{K}\right]$, pe baza conectivității arcurilor. Elementele care se suprapun sunt adunate astfel încât

$$\left[\overline{K}\right]=\sum_e\left[\widetilde{k}^e\right].$$

Pentru sistemul din fig. 4.13, *a*, matricea de rigiditate globală neredusă este

$$\left[\overline{K}\right]=\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2+k_5 & -k_2 & -k_5 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3+k_6 & -k_3 & -k_6 \\ 0 & -k_5 & -k_3 & k_3+k_4+k_5 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_6 & -k_4 & k_4+k_6 \end{bmatrix}.$$

În continuare trebuie precizate condițiile la limită. Nodul *5* este fix, deci $q_5=0$ şi elementul respectiv trebuie eliminat din vectorul deplasărilor. Matricea de rigiditate globală redusă se obține eliminând, din matricea de rigiditate neredusă, linia şi coloana care conțin gradul de libertate "de rezemare".

La sistemul din fig. 4.13, *a* matricea de rigiditate globală redusă este

$$\left[K\right]=\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2+k_5 & -k_2 & -k_5 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3+k_6 & -k_3 \\ 0 & -k_5 & -k_3 & k_3+k_4+k_5 \end{bmatrix}.$$

Împreună cu matricea de masă diagonală

$$\left[M\right]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix},$$

matricea de rigiditate este folosită pentru scrierea ecuațiilor de mişcare

$$[M]\{\ddot{Q}\}+[K]\{Q\}=\{0\}$$

şi rezolvarea problemei respective de valori proprii

$$[K]\{\Phi\}=\omega^2\,[M]\{\Phi\},$$

pentru determinarea modurilor reale de vibraţie ale sistemului neamortizat.

Pentru sisteme care includ amortizoare vâscoase, se foloseşte aceeaşi metodă pentru asamblarea matricii de amortizare globale $[C]$. La modelul din fig. 4.14 conectivităţile arcurilor sunt valabile şi pentru amortizoare deşi, în general, acestea pot fi diferite.

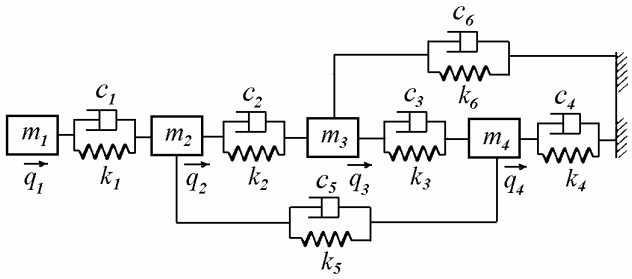


Fig. 4.14

Matricea globală de amortizare este

$$[C]=\begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2+c_5 & -c_2 & -c_5 \\ 0 & -c_2 & c_2+c_3+c_6 & -c_3 \\ 0 & -c_5 & -c_3 & c_3+c_4+c_5 \end{bmatrix}.$$

Ecuaţiile mişcării libere a sistemului amortizat se scriu

$$[M]\{\ddot{Q}\}+[C]\{\dot{Q}\}+[K]\{Q\}=\{0\}.$$

În acest caz, sistemul are moduri complexe de vibraţie. Valorile proprii complexe dau pulsaţiile proprii amortizate şi rapoartele de amortizare modale. Sistemele cu amortizare proporţională au moduri reale de vibraţie. Vibraţiile sistemelor amortizate se calculează ca în § 3.6.2 şi sunt tratate într-un capitol din volumul al doilea.

Exemplul 4.7

Să se calculeze frecvenţele proprii şi forma modurilor proprii de vibraţie ale sistemului din fig. 4.15. Masele sunt egale: $m_1=m_2=....=m_{11}=1\,\text{kg}$, iar

rigiditățile sunt $k_1 = k_{11} = 2421$ N/m , $k_2 = k_{10} = 2989$ N/m , $k_3 = k_9 = 3691$ N/m , $k_4 = k_8 = 4556$ N/m , $k_5 = k_7 = 5625$ N/m , $k_6 = 18000$ N/m .

Rezolvare. Frecvențele proprii sunt 2,74, 2,95, 7,24, 7,80, 11,47, 12,13, 15,00, 15,62, 18,49, 19,32 şi 28,57 Hz. Sistemul are cinci perechi de frecvențe proprii apropiate între ele, câte una pentru un mod simetric şi una pentru un mod antisimetric. Rezultatul este tipic pentru structuri simetrice.

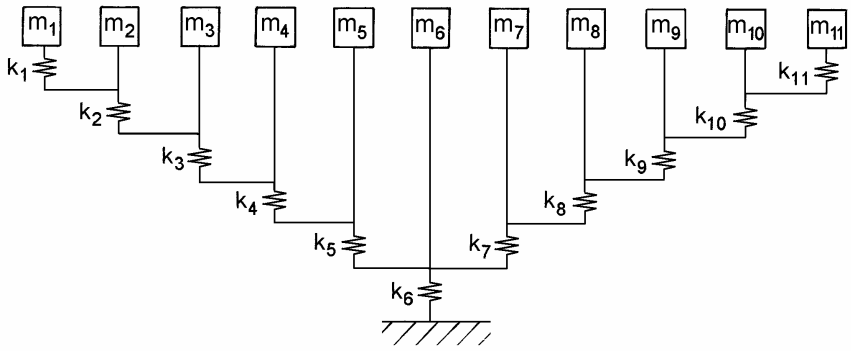


Fig. 4.15

Primele 10 moduri sunt reprezentate în fig. 4.16 față de o linie de referință verticală.

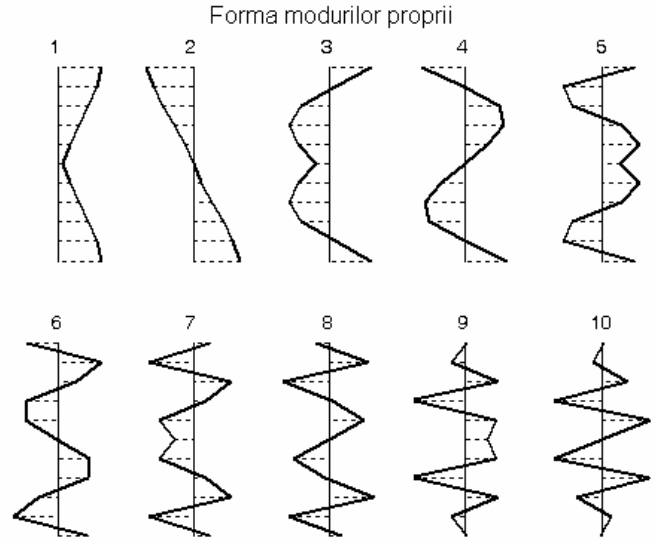


Fig. 4.16

Exemplul 4.8

La sistemul cu 15 g.d.l. din fig. 4.17 se cer matricile *M*, *K* şi *C*. Să se calculeze apoi pulsațiile proprii amortizate şi rapoartele de amortizare modale.

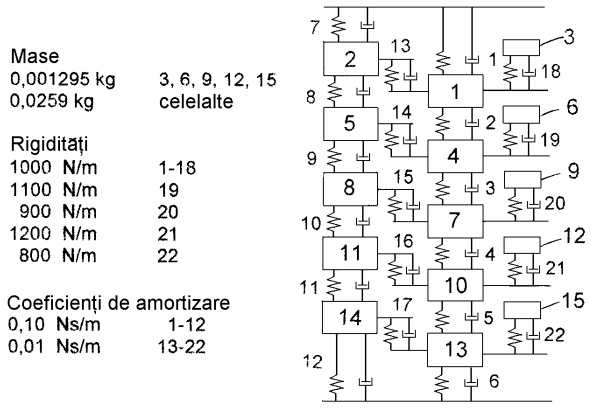


Fig. 4.17

Rezolvare. Valorile obținute cu programul VIBMKC sunt prezentate în Tabelul 4.2. Valorile rapoartelor de amortizare sunt înmulțite cu 100.

Tabelul 4.2

Modul	ω_d, *Hz*	ζ,%	Modul	ω_d, *Hz*	ζ,%
1	15,98	0,502	9	68,88	1,378
2	30,86	0,968	10	73,72	1,579
3	43,60	1,364	11	128,87	0,536
4	46,47	0,301	12	136,59	0,506
5	53,35	1,665	13	143,89	0,477
6	53,42	0,670	14	150,87	0,457
7	59,45	1,853	15	157,52	0,437
8	61,62	1,060			

Cele dinci mase din partea dreaptă a sistemului sunt cu un ordin de mărime mai mici decât celelalte mase. Aceasta produce un grup de cinci pulsații proprii sensibil mai mari decât celelalte. Datorită valorilor relativ mici ale amortizării, pulsațiile proprii amortizate sunt aproximativ egale cu pulsațiile proprii neamortizate.

4.2 Structuri plane din bare articulate

O structură de tip grindă cu zăbrele este compusă din bare articulate la capete. Principala ipoteză simplificatoare la grinzi cu zăbrele consideră că toate barele sunt conectate prin articulații fără frecare şi nu transmit momente între ele.

În practică, asamblarea barelor se face prin nituire, sudare sau cu şuruburi. Totuşi, modelul simplificat cu bare articulate la capete reprezintă o aproximație inginerească surprinzător de bună. Barele articulate la capete pot prelua doar solicitări de întindere sau compresiune. În programele de analiză cu elemente finite, bara articulată la capete se numeşte *truss*. Structurile din bare încastrate la capete (grinzi) sunt tratate în § 4.3.

La o grindă cu zăbrele, forțele exterioare şi reacțiunile se aplică doar la articulații iar barele au rigiditate axială constantă, fiind deci elemente finite naturale. Pentru a ține cont de orientarea spațială a barelor, se utilizează coordonate locale şi un sistem de coordonate globale. În continuare, matricile de masă şi de rigiditate ale elementelor se calculează întâi în coordonate locale, apoi în sistemul de coordonate globale. Matricile definite în sistemul global pot fi expandate la dimensiunea sistemului şi apoi adunate pentru a obține matricile globale de masă şi de rigiditate care sunt utilizate în rezolvarea problemei de valori proprii şi în calculul răspunsului dinamic.

4.2.1 Coordonate şi funcții de formă pentru elementul *truss*

Se consideră un element cu două noduri, articulat la capete, în sistemul de coordonate *local*, cu o axă în lungul elementului. Nodurile sunt numerotate convenabil *1* şi *2*, coordonatele lor în sistemul de referință *fizic* (cartezian) fiind x_1 şi respectiv x_2 (fig. 4.18, *a*).

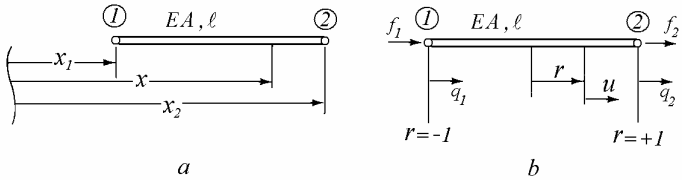


Fig. 4.18

Se definește un sistem de referință *intrinsec* sau *natural* care permite precizarea poziției unui punct din interiorul elementului printr-o coordonată adimensională

$$r = \frac{2}{x_2 - x_1}\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right), \tag{4.22}$$

astfel încât $r=-1$ la nodul *1* şi $r=+1$ la nodul *2* (fig. 4.18, *b*).

Exprimând coordonatele *fizice* în funcție de coordonatele *naturale* rezultă

$$x = N_1(r)\, x_1 + N_2(r)\, x_2\,, \tag{4.23}$$

unde $$N_1(r)=\frac{1}{2}(1-r) \quad \text{şi} \quad N_2(r)=\frac{1}{2}(1+r) \tag{4.24}$$

pot fi considerate *funcții de interpolare geometrică*. Graficele acestor funcții sunt prezentate în figurile 4.19, *a*, *b*.

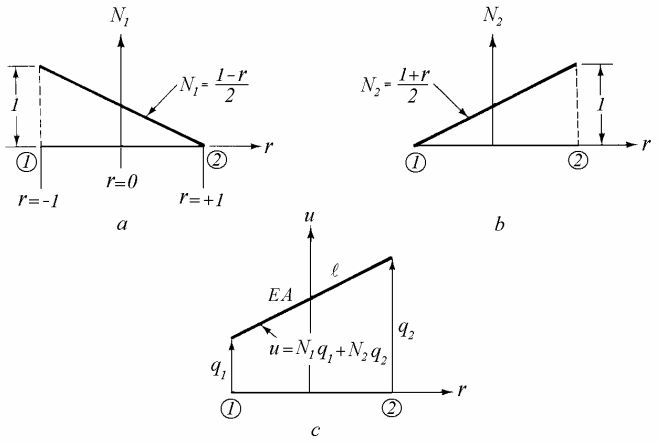


Fig. 4.19

Pentru un element de bară cu două noduri, se poate presupune o distribuție liniară a deplasărilor. Deplasarea unui punct arbitrar ales în interiorul elementului poate fi exprimată în funcție de deplasările nodale q_1 şi q_2 sub forma

$$u(r)= N_1(r)\, q_1 + N_2(r)\, q_2\,. \tag{4.25}$$

În notație matricială

$$u = \sum_{i=1}^{2} N_i\, q_i = \lfloor N \rfloor \left\{ q^e \right\}, \tag{4.26}$$

unde

$$\lfloor N \rfloor = \lfloor N_1 \quad N_2 \rfloor \quad \text{şi} \quad \left\{ q^e \right\} = \left\{ q_1 \quad q_2 \right\}^T . \tag{4.27}$$

În relația (4.26), $\left\{ q^e \right\}$ este vectorul deplasărilor nodale al elementului iar $\lfloor N \rfloor$ este vectorul linie al *funcțiilor de interpolare a deplasărilor,* denumite şi *funcții de formă*. Se poate verifica uşor că $u = q_1$ la nodul *1*, $u = q_2$ la nodul *2* iar deplasarea *u* variază liniar (fig. 4.19, *c*).

Relațiile (4.23) şi (4.25) arată că atât geometria elementului cât şi câmpul de deplasări sunt interpolate utilizând aceleaşi funcții de formă, procedeu denumit formularea *izoparametrică*.

4.2.2 Matricile elementului în coordonate locale

În analiza dinamică, deplasarea este o funcție de spațiu şi timp $u = u(x,t)$, alungirile specifice sunt $\varepsilon = \partial u / \partial x$ iar tensiunile normale sunt date de legea lui Hooke, $\sigma = E\varepsilon$.

Energia de deformație a elementului $U_e(t)$ este

$$U_e = \frac{1}{2}\int_e \sigma\,\varepsilon\,dV = \frac{1}{2}\int_e E_e\,\varepsilon^2\,A_e\,dx = \frac{E_e A_e}{2}\int_e \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\,. \quad (4.28)$$

Transformarea de la *x* la *r* în expresia (4.22) conduce la

$$dx = \frac{x_2 - x_1}{2}\,dr = \frac{\ell_e}{2}\,dr\,, \quad (4.29)$$

unde $-1 \le r \le +1$ iar lungimea elementului este $\ell_e = \left| x_2 - x_1 \right|$.

Deoarece $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \left[\dfrac{\partial N}{\partial x}\right]\left\{ q^e \right\}$ şi $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial N}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{2}{\ell_e}\dfrac{\partial N}{\partial r}$, unde $\dfrac{\partial N_1}{\partial r} = -\dfrac{1}{2}$ şi $\dfrac{\partial N_2}{\partial r} = +\dfrac{1}{2}$, se poate scrie $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \left\{ q^e \right\}^T \left[\dfrac{\partial N}{\partial x}\right]^T \left[\dfrac{\partial N}{\partial x}\right]\left\{ q^e \right\}$, astfel încât energia de deformație a elementului (4.28) devine

$$U_e = \frac{1}{2}\left\{ q^e \right\}^T \frac{2E_e A_e}{\ell_e}\int_{-1}^{+1} \left[\frac{\partial N}{\partial r}\right]^T \left[\frac{\partial N}{\partial r}\right] dr\ \left\{ q^e \right\}. \quad (4.30)$$

Expresia de mai sus are forma

$$U_e = \frac{1}{2}\left\{ q^e \right\}^T \left[k^e \right] \left\{ q^e \right\}, \quad (4.31)$$

în care matricea de rigiditate a elementului $\left[k^e \right]$ este

$$\left[k^e \right] = \frac{2E_e A_e}{\ell_e}\int_{-1}^{+1} \left[\frac{\partial N}{\partial r}\right]^T \left[\frac{\partial N}{\partial r}\right] dr = \frac{2E_e A_e}{\ell_e}\int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} dr$$

sau

$$\left[k^e\right]=\frac{E_eA_e}{\ell_e}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}. \tag{4.32}$$

Energia cinetică a elementului $T_e(t)$ este

$$T_e=\frac{\rho A_e}{2}\int_e\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\,. \tag{4.33}$$

unde ρ este densitatea materialului şi $\partial u/\partial t=\dot{u}$ este viteza în secţiunea *x*.

Din (4.26) se obţine

$$\dot{u}=\lfloor N\rfloor\left\{\dot{q}^e\right\}, \tag{4.34}$$

unde $\left\{\dot{q}^e\right\}$ este vectorul coloană al vitezelor nodale.

Înlocuind (4.34) în (4.33) rezultă

$$T_e=\frac{1}{2}\left\{\dot{q}^e\right\}^T\rho A_e\int_e\lfloor N\rfloor^T\lfloor N\rfloor dx\left\{\dot{q}^e\right\}. \tag{4.35}$$

Expresia (4.35) are forma

$$T_e=\frac{1}{2}\left\{\dot{q}^e\right\}^T\left[m^e\right]\left\{\dot{q}^e\right\}. \tag{4.36}$$

unde

$$\left[m^e\right]=\rho A_e\int_e\lfloor N\rfloor^T\lfloor N\rfloor dx \tag{4.37}$$

este *matricea de masă coerentă* a elementului. Aceasta este calculată prin aceeaşi metodă şi cu aceleaşi funcţii de formă ca matricea de rigiditate a elementului.

Schimbând variabila se obţine

$$\left[m^e\right]=\frac{\rho A_e\ell_e}{2}\int_{-1}^{+1}\lfloor N\rfloor^T\lfloor N\rfloor dr=\frac{\rho A_e\ell_e}{8}\int_{-1}^{+1}\begin{bmatrix}(1-r)^2 & 1-r^2\\ 1-r^2 & (1+r)^2\end{bmatrix}dr$$

sau

$$\left[m^e\right]=\frac{\rho A_e\ell_e}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}. \tag{4.38}$$

4.2.3 Transformarea din coordonate locale în coordonate globale

În fig. 4.20 este reprezentat un element de bară articulată la capete (*truss*) în poziţia iniţială şi în poziţia deformată. Deplasările nodale sunt notate cu litere

mici în sistemul de coordonate local *xOy* şi cu litere mari - în sistemul de coordonate global *XOY*.

În sistemul de coordonate global, fiecare nod are două grade de libertate. Un nod al cărui index global este *j* are gradele de libertate $2j-1$ şi $2j$, şi deplasările Q_{2j-1} şi Q_{2j}.

În fig. 4.20 se observă că deplasarea q_1 este egală cu suma proiecțiilor deplasărilor Q_1 şi Q_2 pe axa *x*. Astfel

$$q_1 = Q_1 \cos\alpha + Q_2 \sin\alpha \,. \qquad (4.39, a)$$

Similar

$$q_2 = Q_3 \cos\alpha + Q_4 \sin\alpha \,. \qquad (4.39, b)$$

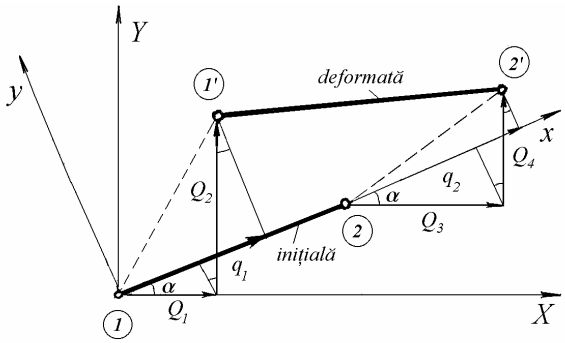


Fig. 4.20

Relațiile (4.39) se pot scrie matricial sub forma

$$\left\{ q^e \right\} = \left[T^e \right] \left\{ Q^e \right\}, \qquad (4.40)$$

unde $\left\{q^e\right\} = \left\{q_1 \quad q_2\right\}^T$ este vectorul deplasărilor elementului în sistemul de coordonate locale, $\left\{Q^e\right\} = \left\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\right\}^T$ este vectorul deplasărilor elementului în sistemul de coordonate globale şi

$$\left[T^e\right] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \qquad (4.41)$$

este o *matrice de transformare* a coordonatelor.

Utilizând datele referitoare la coordonatele nodale, notând $\left(X_1, Y_1\right)$ şi $\left(X_2, Y_2\right)$ coordonatele nodurilor *1* şi *2*, se calculează

$$\cos\alpha = \frac{X_2 - X_1}{\ell_e},\ \sin\alpha = \frac{Y_2 - Y_1}{\ell_e},\ \ell_e = \sqrt{\left(X_2 - X_1\right)^2 + \left(Y_2 - Y_1\right)^2}\ . \quad (4.42)$$

Mărimile definite de relațiile (4.42) intervin în elementele matricii (4.41).

4.2.4 Matricile elementului în coordonate globale

Înlocuind relația (4.40) în expresia energiei de deformație a elementului în coordonate locale (4.31), rezultă

$$U_e = \frac{1}{2}\left\{Q^e\right\}^T\left[T^e\right]^T\left[k^e\right]\left[T^e\right]\left\{Q^e\right\}. \quad (4.43)$$

În coordonate globale, energia de deformație a elementului are expresia

$$U_e = \frac{1}{2}\left\{Q^e\right\}^T\left[K^e\right]\left\{Q^e\right\}, \quad (4.44)$$

unde $\left[K^e\right]$ este matricea de rigiditate a elementului în coordonate globale.

Comparând expresiile (4.43) şi (4.44), se obține matricea de rigiditate în coordonate globale sub forma

$$\left[K^e\right] = \left[T^e\right]^T\left[k^e\right]\left[T^e\right]. \quad (4.45)$$

Înlocuind $\left[T^e\right]$ din relația (4.41) şi $\left[k^e\right]$ din relația (4.32) se obține

$$\left[K^e\right] = \frac{E_e A_e}{\ell_e}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}, \quad (4.46)$$

unde $c = \cos\alpha$ şi $s = \sin\alpha$.

Similar, energia cinetică în coordonate globale se scrie

$$T_e = \frac{1}{2}\left\{\dot{Q}^e\right\}^T\left[M^e\right]\left\{\dot{Q}^e\right\}. \quad (4.47)$$

Matricea de masă coerentă a elementului în coordonate globale este

$$\left[M^e\right] = \left[T^e\right]^T\left[m^e\right]\left[T^e\right],$$

sau, înlocuind $\left[T^e\right]$ din relația (5.41) şi $\left[m^e\right]$ din relația (4.38)

$$\left[M^e\right]=\frac{\rho A_e \ell_e}{6}\begin{bmatrix} 2c^2 & 2cs & c^2 & cs \\ 2cs & 2s^2 & cs & s^2 \\ c^2 & cs & 2c^2 & 2cs \\ cs & s^2 & 2cs & 2s^2 \end{bmatrix}. \qquad (4.48)$$

Matricea (4.46) este singulară (de ordinul 4 şi de rang 1) deoarece elementul nu este rezemat. Deficiența de rang a matricii este egală cu numărul celor trei mişcări posibile de corp rigid.

4.2.5 Asamblarea matricilor de rigiditate şi de masă

Matricile globale de masă şi de rigiditate, $[K]$ şi $[M]$, sunt asamblate pe baza matricilor elementelor $\left[K^e\right]$ şi $\left[M^e\right]$ utilizând informația privind conectivitatea elementelor.

Compatibilitatea deplasărilor nodale ale elementelor cu deplasările nodale globale ale structurii poate fi exprimată prin relații de forma

$$\left\{Q^e\right\}=\left[\widetilde{T}^e\right]\left\{\overline{Q}\right\}, \qquad (4.49)$$

unde $\left\{Q^e\right\}$ este vectorul deplasărilor elementului în coordonate globale, $\left\{\overline{Q}\right\}$ este vectorul tuturor deplasărilor nodale ale structurii şi $\left[\widetilde{T}^e\right]$ este o *matrice de conectivitate* (de *localizare*), care are elemente egale cu 1 la gradele de libertate ale nodurilor şi zerouri în rest.

Energia de deformație a elementului în coordonate globale poate fi exprimată în funcție de vectorul deplasărilor globale înlocuind (4.49) în (4.44)

$$U_e=\frac{1}{2}\left\{\overline{Q}\right\}^T\left[\widetilde{T}^e\right]^T\left[K^e\right]\left[\widetilde{T}^e\right]\left\{\overline{Q}\right\}$$

sau

$$U_e=\frac{1}{2}\left\{\overline{Q}\right\}^T\left[\widetilde{K}^e\right]\left\{\overline{Q}\right\},$$

unde *matricea de rigiditate expandată a elementului*

$$\left[\widetilde{K}^e\right]=\left[\widetilde{T}^e\right]^T\left[K^e\right]\left[\widetilde{T}^e\right] \qquad (4.50)$$

are dimensiunile matricilor sistemului.

Pentru ilustrarea celor de mai sus, se consideră grinda cu zăbrele cu şapte bare din fig. 4.21.

Matricea de conectivitate a elementului *4*, la care cele două noduri nu sunt numerotate consecutiv, este

$$\left[\widetilde{T}^4\right]=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

în timp ce, pentru elementul *5*, la care cele două noduri sunt numerotate consecutiv, aceasta este

$$\left[\widetilde{T}^5\right]=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}.$$

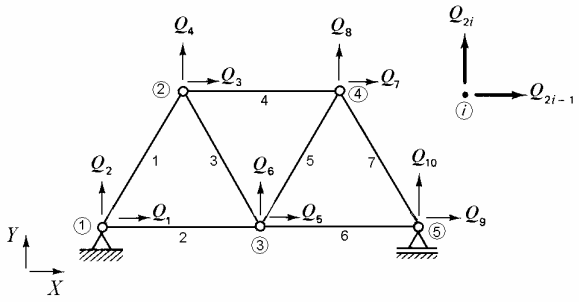


Fig. 4.21

Matricile de rigiditate expandate corespunzătoare au forma

$$\left[\widetilde{K}^4\right]=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\end{array}\\\begin{bmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{bmatrix}\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\end{array}\end{array},\quad \left[\widetilde{K}^5\right]=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\end{array}\\\begin{bmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{bmatrix}\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\end{array}\end{array}$$

Se poate presupune că structura este construită adăugând elementele unul după celălalt, plasând fiecare element într-o poziție predeterminată. Pe măsura adăugării elementelor la structură, capacitatea acesteia de a prelua sarcinile exterioare crește, odată cu modificarea corespunzătoare a matricii de rigiditate a structurii. Matricile de rigiditate ale elementelor pot fi însumate pentru a obține

matricea de rigiditate a întregii structuri dacă acestea au "dimensiunile structurii" şi dacă operează asupra unor vectori care conțin aceleaşi deplasări. Matricea de rigiditate a structurii se obține prin simpla adunare a matricilor de rigiditate expandate ale elementelor.

Energia de deformație a întregii structuri

$$U = \frac{1}{2} \{ \overline{Q} \}^T [\overline{K}] \{ \overline{Q} \} \tag{4.51}$$

poate fi calculată prin simpla însumare a energiilor de deformație ale elementelor

$$U = \sum_e U_e = \sum_e \frac{1}{2} \{ \overline{Q} \}^T [\widetilde{K}^e] \{ \overline{Q} \} = \frac{1}{2} \{ \overline{Q} \}^T \sum_e [\widetilde{K}^e] \{ \overline{Q} \}. \tag{4.52}$$

Comparând expresiile (4.51) şi (4.52) se obține

$$[\overline{K}] = \sum_e [\widetilde{K}^e] . \tag{4.53}$$

Matricea de rigiditate globală este egală cu suma matricilor de rigiditate expandate ale elementelor.

Similar, matricea de masă globală $[\overline{M}]$ este asamblată din matricile de masă expandate ale elementelor

$$[\overline{M}] = \sum_e [\widetilde{M}^e] = \sum_e [\widetilde{T}^e]^T [M^e] [\widetilde{T}^e]. \tag{4.54}$$

Matricile de rigiditate şi de masă nereduse $[\overline{K}]$ şi $[\overline{M}]$ sunt utilizate în cazul sistemelor nerezemate. La sistemele rezemate, acestea se condensează utilizând condițiile la limită.

Efectul arcurilor şi maselor concentrate se poate include adăugând valorile parametrilor respectivi în pozițiile corespunzătoare pe diagonalele principale ale matricilor respective.

4.2.6 Ecuațiile de mişcare şi problema de valori proprii

Se defineşte lagrangianul L prin expresia

$$L = T - \Pi , \tag{4.55}$$

în care T este energia cinetică

$$T = \frac{1}{2} \{ \dot{Q} \}^T [M] \{ \dot{Q} \} \tag{4.56, a}$$

iar Π este energia potențială totală

$$\Pi = \frac{1}{2}\{Q\}^T[K]\{Q\} - \{Q\}^T\{F\}. \qquad (4.56, b)$$

În expresia (4.56, b), $\{F\}$ este vectorul global al forţelor nodale aplicate.

Aplicând principiul lui Hamilton, se obţin ecuaţiile lui Lagrange pentru sisteme neamortizate

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\{\dot{Q}\}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\{Q\}} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\{\dot{Q}\}}\right) - \frac{\partial \Pi}{\partial\{Q\}} = 0\,. \quad (4.57)$$

Utilizând regulile de derivare a unui scalar în raport cu un vector, se obţin ecuaţiile de mişcare

$$[M]\{\ddot{Q}\} + [K]\{Q\} = \{F\}. \qquad (4.58)$$

În cazul vibraţiilor libere, vectorul forţelor este zero. Astfel

$$[M]\{\ddot{Q}\} + [K]\{Q\} = \{0\}. \qquad (4.59)$$

Căutând soluţii de forma

$$\{Q\} = \{\Phi\}\sin\omega t\,, \qquad (4.60)$$

unde $\{\Phi\}$ este vectorul amplitudinilor deplasărilor nodale, rezultă problema generalizată de valori proprii

$$[K]\{\phi\}_r = \omega_r^2[M]\{\phi\}_r\,, \qquad (r = 1,\ldots,n), \qquad (4.61)$$

în care ω_r^2 sunt valorile proprii reale egale cu pătratele pulsaţiilor proprii şi $\{\phi\}_r$ sunt vectorii proprii reali.

Cu ajutorul programului VIBTRUSS se pot calcula modurile proprii de vibraţie ale structurilor neamortizate plane, din bare articulate la capete.

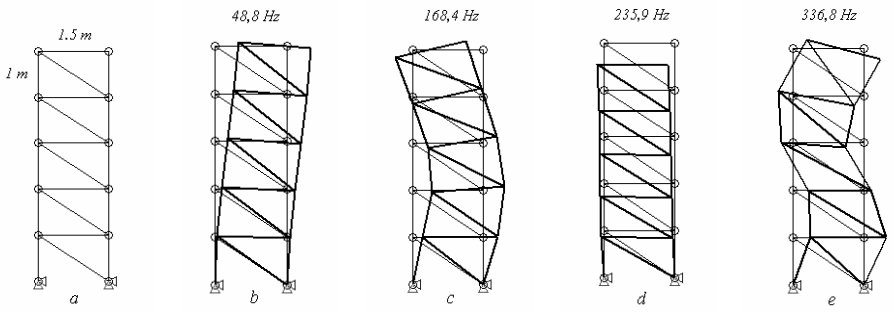


Fig. 4.22

Exemplul 4.9

Să se calculeze primele patru frecvențe proprii şi forma modurilor respective de vibrație pentru grinda cu zăbrele din fig. 4.22, *a* la care $E = 200$ GPa , $\rho = 7850$ kg/m^3 şi $A = 100$ mm^2 pentru toate cele 20 bare.

Rezolvare. Primele patru frecvențe proprii sunt 48,8 , 168,4 , 235,9 şi 336,8 Hz. Formele modurilor proprii sunt prezentate în figurile 4.22, *b* - *e*.

4.3 Cadre plane

Cadrele sunt structuri din elemente legate rigid între ele, de tipul barelor încastrate la capete sau grinzilor. În programele de analiză cu elemente finite, acest tip de bară este denumit *beam*. Grinzile sunt bare solicitate prin sarcini transversale, interconectate prin legături (nodale) rigide care au rotiri determinate şi care, în afara forțelor, transmit momente încovoietoare de la un element la altul.

În acest paragraf, întâi se prezintă elementul finit *beam,* definit în coordonate locale, apoi elementul finit de *cadru* (frame) care modelează o grindă înclinată.

4.3.1 Analiza statică a unei grinzi cu secțiune constantă

În continuare se consideră grinzi cu secțiunea transversală simetrică față de planul sarcinilor aplicate (fig. 4.23). Deformațiile transversale de forfecare se neglijează.

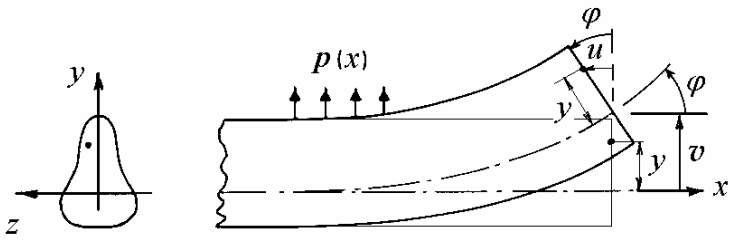


Fig. 4.23

Deplasarea axială a unui punct din secțiunea transversală, situat la distanța *y* de axa neutră, este aproximativ

$$u = -\varphi\, y = -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\, y\,, \tag{4.62}$$

unde v este săgeata axei barei în secțiunea x şi $\varphi = v'$ este rotirea secțiunii transversale (sau panta) în x. Alungirile specifice sunt

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}\, y\,. \tag{4.63}$$

Tensiunile normale în secțiunea transversală au expresia

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x = -E\,\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}\, y\,, \tag{4.64}$$

în care *E* este modulul de elasticitate longitudinal al materialului.

Momentul încovoietor se calculează pe baza distribuției tensiunilor pe înălțimea secțiunii transversale

$$M(x) = -\int_A \sigma_x\, y\, dA = EI_z\,\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = EI_z\, v^{II}\,. \tag{4.65}$$

unde I_z este momentul de inerție al secțiunii transversale față de axa neutră *z*.

Forța tăietoare este dată de

$$T(x) = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = EI_z\,\frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}x^3} = EI_z\, v^{III}\,. \tag{4.66}$$

Sarcina transversală pe unitatea de lungime a barei este

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = EI_z\,\frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} = EI_z\, v^{IV}\,. \tag{4.67}$$

Ecuația diferențială de echilibru se scrie

$$EI_z\,\frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} = p(x)\,. \tag{4.68}$$

4.3.2 Discretizarea cu elemente finite

Cadrul plan este împărțit în elemente finite, ca în fig. 4.24. Fiecare nod are trei grade de libertate, două deplasări liniare şi o rotire. Gradele de libertate ale nodului *i* sunt Q_{3i-2} - deplasarea în lungul axei *X*, Q_{3i-1} - deplasarea în lungul axei *Y* şi Q_{3i} - rotirea față de axa *Z*.

Nodurile sunt localizate prin coordonatele lor în sistemul de referință global *XOY* iar conectivitatea elementelor este definită prin indicii nodurilor.

Elementele, modelate ca grinzi cu secțiunea constantă, fără deformații de forfecare şi fără sarcini aplicate între noduri, au modulul de rigiditate la încovoiere EI, masa pe unitatea de lungime ρA şi lungimea ℓ.

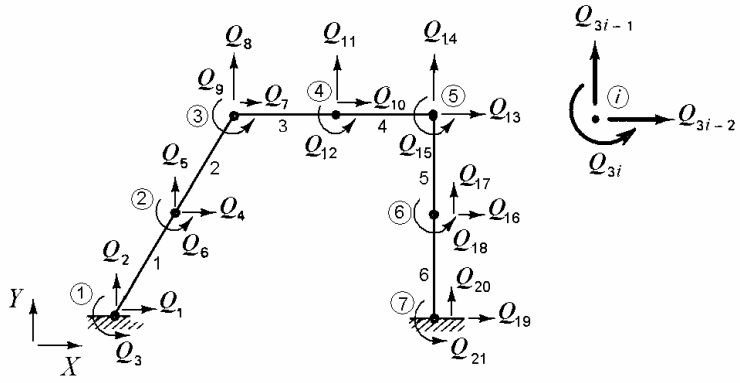


Fig. 4.24

În continuare se stabilesc funcțiile de formă pentru elementul *beam*, apoi se calculează matricile de rigiditate şi de masă pentru element, întâi în sistemul de coordonate locale, apoi în sistemul global. Matricile sunt apoi expandate la dimensiunea structurii şi însumate pentru a obține matricile globale nereduse. Impunând condițiile la limită, se calculează matricile reduse de rigiditate şi de masă, care împreună cu matricea de amortizare sunt utilizate în analiza dinamică.

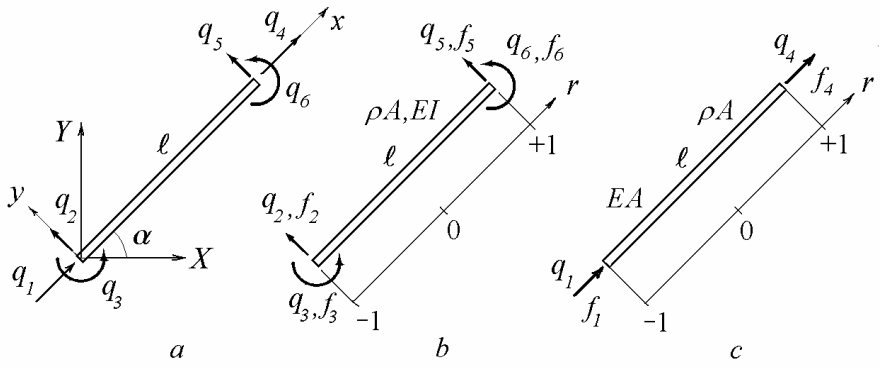


Fig. 4.25

Se consideră un element de bară înclinat, ca în fig. 4.25, *a*, în care se arată deplasările nodale şi axele sistemelor de referință.

În sistemul de coordonate fizice locale, axa *x*, orientată în lungul barei, are originea în capătul din stânga al barei şi este înclinată cu unghiul α față de axa globală *X*. Se mai poate folosi şi un sistem de coordonate intrinseci (naturale).

Vectorul deplasărilor nodale ale elementului este

$$\left\{ q^e \right\} = \left\{ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6 \right\}^T \tag{4.69}$$

iar vectorul corespunzător al forțelor nodale (se includ şi momentele) ale elementului poate fi scris

$$\left\{ f^e \right\} = \left\{ f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5,\ f_6 \right\}^T . \tag{4.70}$$

Forțele (şi momentele) $f_2,\ f_3,\ f_5,\ f_6$ şi deplasările corespunzătoare $q_2,\ q_3,\ q_5,\ q_6$ descriu încovoierea elementului (fig. 4.25, *b*), în timp ce forțele $f_1,\ f_4,$ şi deplasările $q_1,\ q_4,$ descriu efectele axiale (fig. 4.25, *c*). Acțiunea lor este decuplată astfel că matricile respective ale elementului pot fi calculate separat.

4.3.3 Funcții de formă statice pentru elementul de grindă

La o grindă cu secțiunea constantă, neîncărcată între extremități, $p = 0$ şi din ecuația (4.68) rezultă $\mathrm{d}^4 v / \mathrm{d}x^4 = 0$. Integrând de patru ori, se obține deplasarea transversală (săgeata) v descrisă de un polinom de gradul trei

$$v(x) = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 \ . \tag{4.71}$$

În (4.71), cele patru constante de integrare a_1, a_2, a_3, a_4 pot fi determinate din condițiile la limită geometrice, care includ săgeata şi panta la cele două capete:

$$x = x_1,\ v = q_2,\ \mathrm{d}v/\mathrm{d}x = q_3\ ,\quad \text{şi} \quad x = x_2,\ v = q_5,\ \mathrm{d}v/\mathrm{d}x = q_6\ . \tag{4.72}$$

Deplasarea transversală poate fi exprimată în funcție de deplasările nodale sub forma

$$v = \lfloor N \rfloor \left\{ q^e \right\}, \tag{4.73}$$

unde $\lfloor N \rfloor$ este vectorul linie al *funcțiilor de formă*, care sunt polinoame de gradul trei, numite *polinoame Hermite*.

Utilizând coordonate naturale, cu $r = -1$ la nodul *1* şi $r = +1$ la nodul *2*, deplasarea transversală poate fi scrisă

$$v(r)=N_1(r)\,v_1+N_2(r)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)_1+N_3(r)\,v_2+N_4(r)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)_2 \quad . \tag{4.74}$$

Deoarece transformarea coordonatelor se face conform relației (4.22)

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_2-x_1}{2}r \tag{4.75}$$

şi deoarece $\ell_e=x_2-x_1$ este lungimea elementului, este valabilă relația (4.29)

$$dx=\frac{\ell_e}{2}dr\,. \tag{4.76}$$

Calculând derivata

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=\frac{\ell_e}{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}, \tag{4.77}$$

relația (4.74) devine

$$v(r)=N_1(r)\,v_1+N_2(r)\frac{\ell_e}{2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)_1+N_3(r)\,v_2+N_4(r)\frac{\ell_e}{2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)_2 \tag{4.78}$$

sau

$$v(r)=N_1\cdot q_2+\frac{\ell_e}{2}N_2\cdot q_3+N_3\cdot q_5+\frac{\ell_e}{2}N_4\cdot q_6 \quad . \tag{4.79}$$

În expresia (4.73) vectorul linie al funcțiilor de formă este

$$\lfloor N\rfloor=\left\lfloor N_1,\ \frac{\ell_e}{2}N_2,\ N_3,\ \frac{\ell_e}{2}N_4\right\rfloor \quad . \tag{4.80}$$

Funcțiile de formă hermitiene sunt polinoame cubice care satisfac condițiile la limită date în Tabelul 4.3 unde semnul "prim" indică derivarea în raport cu variabila *r*.

Tabelul 4.3

	N_1	N'_1	N_2	N'_2	N_3	N'_3	N_4	N'_4
$r=-1$	1	0	0	1	0	0	0	0
$r=+1$	0	0	0	0	1	0	0	1

Impunând condițiile de mai sus unor polinoame de gradul trei cu patru constante arbitrare, se obțin expresiile funcțiilor de formă ale elementului *beam* în coordonate naturale (4.81), reprezentate grafic în fig. 4.26:

$$N_1(r)=\frac{1}{4}(1-r)^2(2+r)=\frac{1}{4}\left(2-3r+r^3\right),$$

$$N_2(r)=\frac{1}{4}(1-r)^2(1+r)=\frac{1}{4}\left(1-r-r^2+r^3\right), \qquad (4.81)$$

$$N_3(r)=\frac{1}{4}(1+r)^2(2-r)=\frac{1}{4}\left(2+3r-r^3\right),$$

$$N_4(r)=-\frac{1}{4}(1+r)^2(1-r)=-\frac{1}{4}\left(1+r-r^2-r^3\right).$$

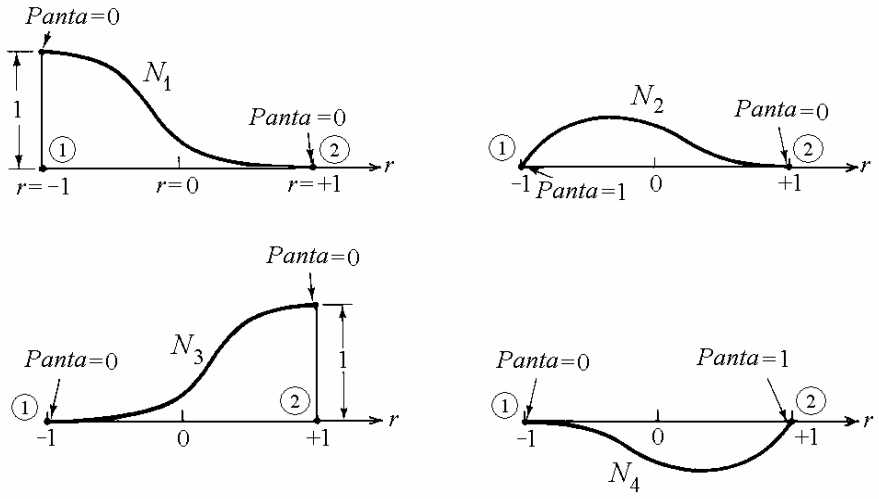


Fig. 4.26

Se poate verifica uşor că la nodul *1*, $v=q_2$ şi $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=\frac{\ell_e}{2}q_3$, iar la nodul *2*, $v=q_5$ şi $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=\frac{\ell_e}{2}q_6$.

4.3.4 Matricea de rigiditate a unui element de grindă

Energia de deformaţie U_e a unui element de grindă este

$$U_e=\frac{EI_e}{2}\int_e\left(\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x. \qquad (4.82)$$

Din relația (4.77) se obține

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{\ell_e}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \qquad \text{și} \qquad \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}=\frac{4}{\ell_e^2}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}r^2}.$$

Înlocuind (4.73) rezultă

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}=\frac{4}{\ell_e^2}\left\lfloor\frac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}r^2}\right\rfloor\left\{q^e\right\}. \tag{4.83}$$

Ridicând la pătrat se obține

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\right)^2=\left(\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\right)^T\left(\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\right)=\left\{q^e\right\}^T\frac{16}{\ell_e^4}\left\lfloor\frac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}r^2}\right\rfloor^T\left\lfloor\frac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}r^2}\right\rfloor\left\{q^e\right\},$$

care se mai poate scrie

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\right)^2=\left\{q^e\right\}^T\frac{16}{\ell_e^4}\lfloor N_r''\rfloor^T\lfloor N_r''\rfloor\left\{q^e\right\}. \tag{4.84}$$

Înlocuind (4.76) și (4.84) în (4.82) se obține energia de deformație a elementului

$$U_e=\frac{1}{2}\left\{q^e\right\}^T\frac{8EI_e}{\ell_e^3}\int_{-1}^{+1}\lfloor N_r''\rfloor^T\lfloor N_r''\rfloor\,dr\,\left\{q^e\right\} \tag{4.85}$$

care are forma

$$U_e=\frac{1}{2}\left\{q^e\right\}^T\left[k_B^e\right]\left\{q^e\right\}. \tag{4.86}$$

Comparând (4.85) cu (4.86) se obține matricea de rigiditate a elementului pentru încovoiere

$$\left[k_B^e\right]=\frac{8EI_e}{\ell_e^3}\int_{-1}^{+1}\lfloor N_r''\rfloor^T\lfloor N_r''\rfloor dr \tag{4.87}$$

sau

$$\left[k_B^e\right]=\frac{8EI_e}{\ell_e^3}\int_{-1}^{+1}\begin{bmatrix}(N_1'')^2 & N_1''N_2'' & N_1''N_3'' & N_1''N_4''\\ N_2''N_1'' & (N_2'')^2 & N_2''N_3'' & N_2''N_4''\\ N_3''N_1'' & N_3''N_2'' & (N_3'')^2 & N_3''N_4''\\ N_4''N_1'' & N_4''N_2'' & N_4''N_3'' & (N_4'')^2\end{bmatrix}\mathrm{d}r. \tag{4.88}$$

Înlocuind funcţiile de formă (4.81) şi rezolvând integralele se obţine matricea de rigiditate a elementului pentru încovoiere în coordonate locale

$$\left[k_B^e\right]=\frac{EI_e}{\ell_e^3}\begin{bmatrix}12 & 6\ell & -12 & 6\ell\\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2\\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell\\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2\end{bmatrix}_e . \tag{4.89}$$

4.3.5 Matricea de masă coerentă a elementului de grindă

În calcule dinamice, deplasările laterale ale grinzii sunt funcţii de spaţiu şi de timp, $v=v(x,t)$.

Energia cinetică instantanee a elementului de grindă este

$$T_e=\frac{\rho A_e}{2}\int_e\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx\,, \tag{4.90}$$

unde ρ este densitatea materialului şi $\partial v/\partial t=\dot{v}$ este viteza în secţiunea *x*.

Din relaţia (4.73) se obţine

$$\dot{v}=\lfloor N\rfloor\left\{\dot{q}^{\,e}\right\}, \tag{4.91}$$

unde $\left\{\dot{q}^{\,e}\right\}$ este vectorul coloană al vitezelor nodale.

Înlocuind (4.76) şi (4.91) în relaţia (4.90) rezultă

$$T_e=\frac{1}{2}\left\{\dot{q}^{\,e}\right\}^T\rho A_e\int_e\lfloor N\rfloor^T\lfloor N\rfloor\,dx\,\left\{\dot{q}^{\,e}\right\} \tag{4.92}$$

care are forma

$$T_e=\frac{1}{2}\left\{\dot{q}^{\,e}\right\}^T\left[m_B^e\right]\left\{\dot{q}^{\,e}\right\}. \tag{4.93}$$

unde

$$\left[m_B^e\right]=\frac{\rho A_e\ell_e}{2}\int_{-1}^{+1}\lfloor N_r\rfloor^T\lfloor N_r\rfloor\,\mathrm{d}r \tag{4.94}$$

este *matricea de masă coerentă* a elementului.

Înlocuind funcţiile de formă (4.81) şi integrând produsele acestora, se obţine matricea de masă coerentă a elementului de grindă în coordonate locale

$$\left[m_B^e\right]=\frac{\rho A_e \ell_e}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22\ell & 54 & -13\ell \\ 22\ell & 4\ell^2 & 13\ell & -3\ell^2 \\ 54 & 13\ell & 156 & -22\ell \\ -13\ell & -3\ell^2 & -22\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}_e . \qquad (4.95)$$

Această matrice de masă este obținută prin aceeaşi metodă ca şi matricea de rigiditate, deci este *coerentă* cu matricea de rigiditate.

4.3.6 Eforturi axiale

Forțele nodale axiale se exprimă în funcție de deplasările axiale prin relația

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_4 \end{Bmatrix}=\left[k_S^e\right]\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_4 \end{Bmatrix} \qquad (4.96)$$

în care matricea de rigiditate (4.32) este

$$\left[k_S^e\right]=\frac{EA_e}{\ell_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (4.97)$$

Similar, din relația (4.38) se obține matricea de masă a elementului pentru mişcări axiale

$$\left[m_S^e\right]=\frac{\rho A_e \ell_e}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \qquad (4.98)$$

4.3.7 Matricile unui element de cadru în coordonate locale

Combinând expresiile (4.97) şi (4.89) prin aranjarea elementelor în poziția corespunzătoare, se obține matricea de rigiditate a elementului de cadru plan

$$\left[k^e\right]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix}_e . \qquad (4.99)$$

În expresia (4.99), raportul între elementele care descriu încovoierea şi cele care descriu întinderea este de ordinul $(i/\ell)^2$, unde '*i*' este raza de inerție. La bare zvelte, acest raport poate fi între $1/20$ şi $1/50$, deci matricea de rigiditate poate fi rău condiționată numeric.

Combinând expresiile (4.98) şi (4.95) şi aranjând elementele în poziția corespunzătoare, se obține matricea de masă coerentă a elementului de cadru plan

$$\left[m^e\right]=\frac{\rho A_e \ell_e}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22\ell & 0 & 54 & -13\ell \\ 0 & 22\ell & 4\ell^2 & 0 & 13\ell & -3\ell^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13\ell & 0 & 156 & -22\ell \\ 0 & -13\ell & -3\ell^2 & 0 & -22\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}_e . \qquad (4.100)$$

4.3.8 Transformarea coordonatelor

În fig. 4.27 se prezintă un element de cadru plan în starea inițială şi cea deformată. Pentru nodul *1*, deplasările liniare locale q_1 şi q_2 sunt exprimate în funcție de deplasările liniare globale Q_1 şi Q_2 prin relațiile

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_1\cos\alpha + Q_2\sin\alpha, \\ q_2 &= -Q_1\sin\alpha + Q_2\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (4.101)$$

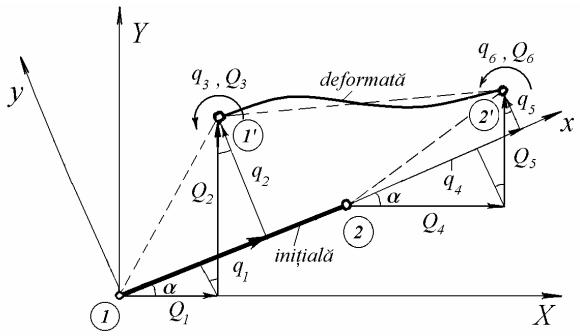


Fig. 4.27

Relațiile (4.101) pot fi scrise matricial sub forma

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \tag{4.101, a}$$

unde

$$[R] = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \tag{4.102}$$

este o *matrice de rotație* în care $c = \cos\alpha$ şi $s = \sin\alpha$.

Deplasările unghiulare (rotirile) sunt aceleaşi în ambele sisteme de coordonate

$$q_3 = Q_3 . \tag{4.103}$$

Adăugând relațiile similare scrise pentru nodul *2*

$$\begin{Bmatrix} q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} Q_4 \\ Q_5 \end{Bmatrix}, \qquad q_6 = Q_6 ,$$

rezultă

$$\{ q^e \} = [T^e] \{ Q^e \}, \tag{4.104}$$

unde $\{ q^e \}$ este vectorul deplasărilor elementului în sistemul de coordonate locale, $\{ Q^e \}$ este vectorul deplasărilor elementului în sistemul de coordonate globale şi

$$[T^e] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.105}$$

este *matricea de transformare* din coordonate locale în coordonate globale.

4.3.9 Matricile elementului de cadru în coordonate globale

Utilizând acelaşi procedeu ca în § 4.2.4 se obțin matricile de rigiditate şi de masă ale elementului de cadru în coordonate globale

$$[K^e] = [T^e]^T [k^e] [T^e] , \tag{4.106}$$

şi

$$[M^e] = [T^e]^T [m^e] [T^e] . \tag{4.107}$$

4.3.10 Asamblarea matricilor de rigiditate şi de masă

Matricile globale de rigiditate şi de masă, $[K]$ şi $[M]$, sunt asamblate din matricile elementelor $[K^e]$ şi $[M^e]$ utilizând matricile de conectivitate ale elementelor $[\widetilde{T}^e]$ care stabilesc legătura între deplasările nodale la nivelul elementelor şi deplasările nodale la nivelul întregii structuri, prin relaţii de forma

$$\{Q^e\} = [\widetilde{T}^e]\{\overline{Q}\}. \tag{4.108}$$

Matricea de rigiditate globală neredusă este egală cu suma matricilor de rigiditate expandate ale elementelor

$$[\overline{K}] = \sum_e [\widetilde{K}^e], \tag{4.109}$$

unde

$$[\widetilde{K}^e] = [\widetilde{T}^e]^T [K^e][\widetilde{T}^e]. \tag{4.110}$$

Similar, matricea de masă globală neredusă $[\overline{M}]$ este asamblată din matricile de masă expandate ale elementelor

$$[\overline{M}] = \sum_e [\widetilde{M}^e] = \sum_e [\widetilde{T}^e]^T [M^e][\widetilde{T}^e]. \tag{4.111}$$

La sistemele rezemate, matricile nereduse de rigiditate şi de masă $[\overline{K}]$ şi $[\overline{M}]$ sunt condensate utilizând condiţiile la limită.

Efectul maselor concentrate şi arcurilor se poate include adăugând valorile parametrilor respectivi în poziţiile corespunzătoare pe diagonalele principale ale matricilor structurii. Dacă încărcările exterioare includ sarcini distribuite, acestea sunt înlocuite cu forţe nodale cinematic echivalente, calculate printr-o metodă coerentă cu cea prin care s-au obţinut matricile de rigiditate şi de masă, bazată pe utilizarea funcţiilor de formă statice. Odată calculate matricile de rigiditate şi de masă şi vectorul forţelor, se pot obţine direct ecuaţiile de mişcare.

Exemplul 4.10

Să se calculeze primele 15 pulsaţii proprii şi forme modale pentru cadrul plan din fig. 4.28 la care $E = 207\ \text{GPa}$, $\rho = 7810\ \text{kg}/\text{m}^3$, $I = 271\ \text{mm}^4$ şi $A = 80{,}6\ \text{mm}^2$ pentru toate barele. Cadrul cu lungimea $606{,}9$ mm şi înălţimea $606{,}9$ mm are doi stâlpi şi două rigle echidistante.

Rezolvare. Datorită simetriei se consideră doar jumătate de cadru, cu legături diferite pentru modurile simetrice şi cele antisimetrice.

Fiecare jumătate de cadru a fost modelată cu 16 elemente identice de grindă plană, 8 pentru stâlp şi 4 pentru fiecare jumătate de riglă.

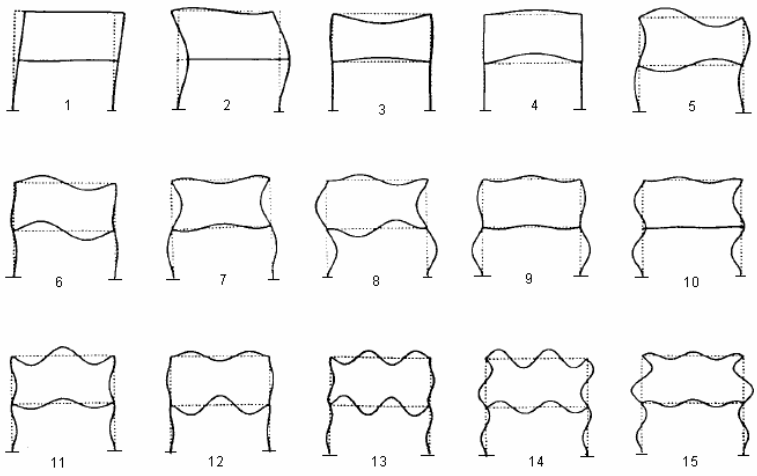


Fig. 4.28

Primele 15 pulsații proprii, calculate cu programul VIBFRAME, au următoarele valori: 107,20 , 377,47 , 397,25 , 475,73 , 1099,3 , 1316,2 , 1504,0 , 1911,6 , 2061,4 , 2447,5 , 2695,0 , 2903,7 , 4171,1 , 4618,3 şi 4943,6 $\mathrm{rad/s}$.

Formele modurilor proprii sunt prezentate în fig. 4.28.

Exemplul 4.11

Să se calculeze primele 15 frecvențe proprii şi forma modurilor proprii ale vibrațiilor coplanare ale cadrului din fig. 4.29 dacă $E = 210\,\mathrm{GPa}$, $\rho = 7850\,\mathrm{kg/m^3}$, $I = 1{,}055 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m^4}$, $A = 3{,}73 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2}$ şi $\ell = 0{,}5\ \mathrm{m}$.

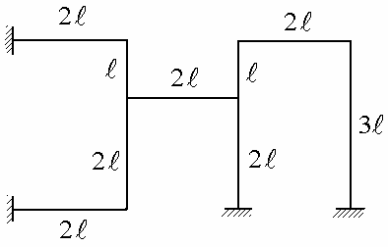


Fig. 4.29

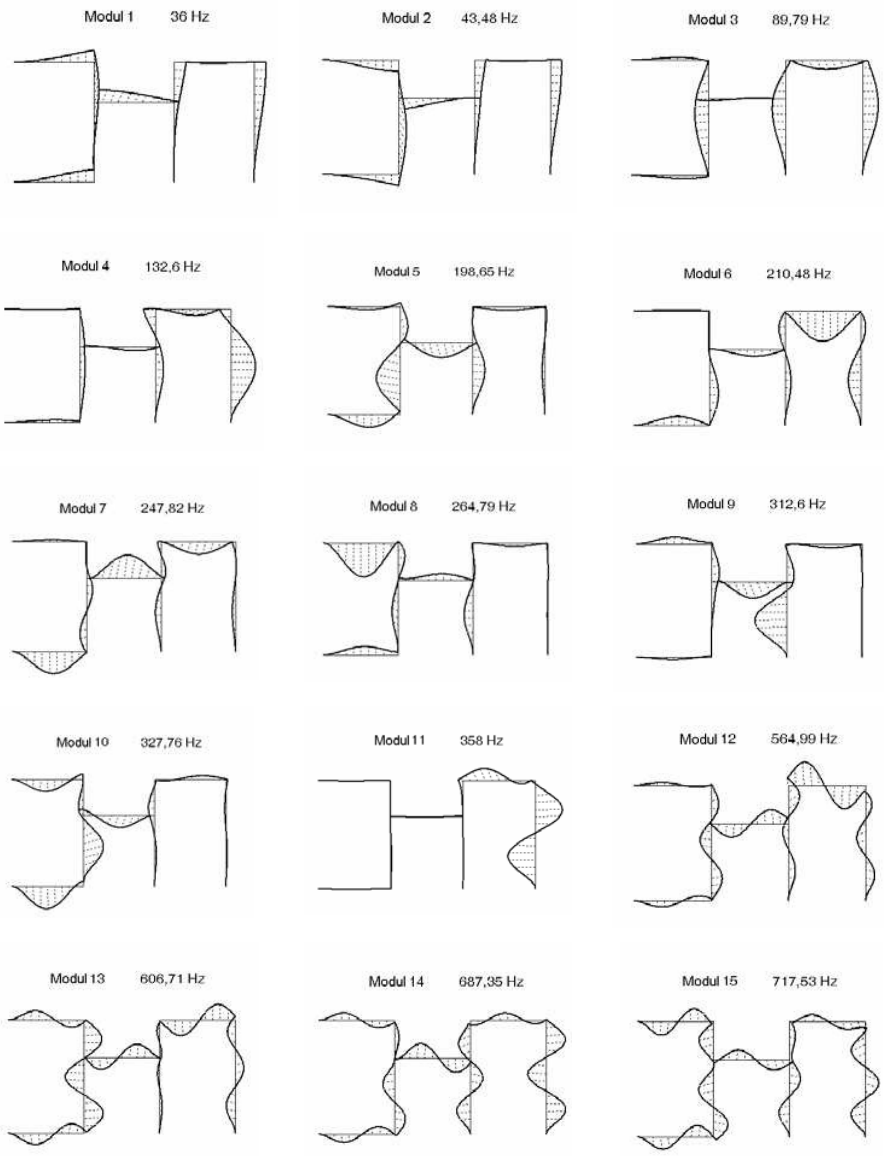


Fig. 4.30

Rezolvare. Fiecare segment de lungime ℓ a fost modelat cu 5 elemente de grindă identice, rezultând în total 85 elemente, deci 86 de noduri. Cu patru noduri fixe şi trei grade de libertate pe nod, matricile condensate ale sistemului sunt

de ordinul 246. Modurile proprii calculate cu programul VIBFRAME sunt prezentate în fig. 4.30 în care apar şi valorile frecvențelor proprii.

4.4 Grilaje

Grilajele sunt cadre plane solicitate de forțe perpendiculare pe planul structurii. Ele sunt cazuri speciale de cadre tridimensionale în care fiecare punct de îmbinare are doar trei deplasări nodale, o translație şi două rotiri, rezultate din acțiuni de forfecare (neglijabile), încovoiere şi răsucire.

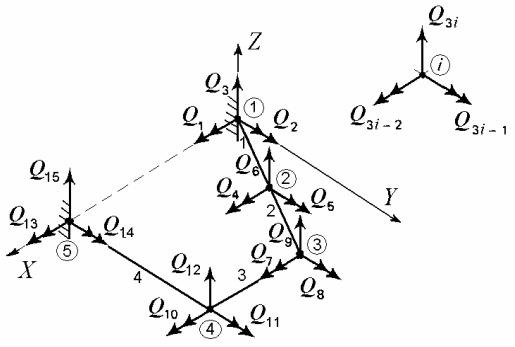


Fig. 4.31

4.4.1 Discretizarea cu elemente finite

Grilajul este împărțit în elemente, ca în exemplul din fig. 4.31. Fiecare nod are trei grade de libertate, două rotiri şi o deplasare liniară, perpendiculară pe planul grilajului. Gradele de libertate ale nodului *i* sunt Q_{3i-2} - rotația față de axa *X*, Q_{3i-1} - rotația față de axa *Y* şi Q_{3i} - deplasarea în lungul axei *Z*.

Nodurile sunt localizate prin coordonatele lor în sistemul de referință global *XOY* iar conectivitatea elementelor este definită prin indicii nodurilor. Elementele sunt modelate ca bare cu secțiune constantă, solicitate la încovoiere şi răsucire, fără deformații de forfecare şi fără sarcini între noduri. Proprietățile caracteristice sunt modulele de rigiditate la încovoiere EI şi la răsucire GI_t, masa pe unitatea de lungime ρA şi lungimea ℓ. Se consideră doar bare cu secțiuni al căror centru de forfecare coincide cu centrul de greutate.

4.4.2 Matricile elementului de grilaj în coordonate locale

Se consideră un element de grilaj înclinat, ca în fig. 4.32, *a*, în care se arată deplasările nodale în coordonate locale şi în coordonate globale.

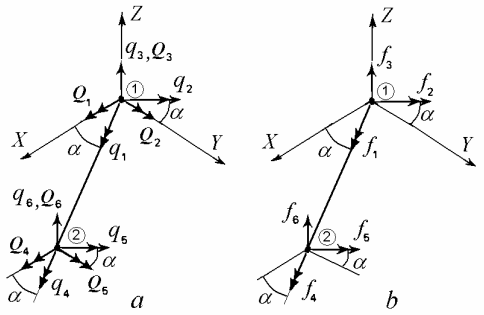


Fig. 4.32

În sistemul local de coordonate fizice, axa *x*, orientată în lungul barei, este înclinată cu unghiul α faţă de axa globală *X*. Axa *z* a sistemului local de coordonate este coliniară cu axa *Z* a sistemului global. Alternativ, se mai poate folosi un sistem de coordonate intrinseci (naturale).

Vectorul deplasărilor nodale ale elementului este

$$\left\{q^e\right\}=\left\{q_1,\, q_2,\, q_3,\, q_4,\, q_5,\, q_6\right\}^T \tag{4.112}$$

iar vectorul corespunzător al forţelor nodale ale elementului se poate scrie

$$\left\{f^e\right\}=\left\{f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4,\, f_5,\, f_6\right\}^T. \tag{4.113}$$

În (4.113) f_3, f_6 sunt forţe transversale, iar f_2, f_5 sunt cupluri care produc încovoiere (fig. 4.32, *b*). În (4.112) deplasările q_3, q_6 sunt translaţii, în timp ce q_2, q_5 sunt rotiri. Vectorii coloană corespunzători sunt legaţi prin matricea de rigiditate la încovoiere.

Rearanjând matricea (4.89) rezultă

$$\begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} = \frac{EI_e}{\ell_e^3} \begin{bmatrix} 4\ell^2 & 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell \\ 6\ell & 12 & 6\ell & -12 \\ 2\ell^2 & 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell \\ -6\ell & -12 & -6\ell & 12 \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}. \tag{4.114}$$

Cele patru forțe nodale ale elementului sunt legate de accelerațiile nodale respective prin matricea de masă. Rearanjând matricea (4.95) relația se poate scrie

$$\begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} = \frac{\rho A_e \ell_e}{420} \begin{bmatrix} 4\ell^2 & 22\ell & -3\ell^2 & 13\ell \\ 22\ell & 156 & -13\ell & 54 \\ -3\ell^2 & -13\ell & 4\ell^2 & -22\ell \\ 13\ell & 54 & -22\ell & 156 \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_5 \\ \ddot{q}_6 \end{Bmatrix}. \tag{4.115}$$

Forțele nodale axiale f_1, f_4 sunt cupluri de răsucire iar deplasările nodale q_1, q_4 sunt unghiuri de răsucire. Deoarece descriu efecte torsionale, acțiunea lor este decuplată de încovoiere. Matricile respective de rigiditate şi de masă pot fi calculate separat. Ele se calculează la fel ca matricile de rigiditate şi de masă pentru solicitări axiale.

Unghiul de răsucire, exprimat prin funcțiile de formă (4.24)

$$\theta(r) = N_1(r)\, q_1 + N_2(r)\, q_4,$$

poate fi înlocuit în expresia energiei de deformație $U_e = \dfrac{GI_{te}}{2} \displaystyle\int_e \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \mathrm{d}x$. După trecerea la coordonate naturale se obține matricea de rigiditate pentru torsiune $\left[k_t^e \right] = \dfrac{2GI_{te}}{\ell_e} \displaystyle\int_{-1}^{+1} \lfloor N_r' \rfloor^T \lfloor N_r' \rfloor \, \mathrm{d}r$.

Datorită acestei analogii, forțele nodale pot fi exprimate în funcție de deplasările nodale prin relația

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \left[k_t^e \right] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_4 \end{Bmatrix}, \tag{4.116}$$

în care matricea de rigiditate pentru torsiune este

$$\left[k_t^e \right] = \frac{GI_{te}}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.117}$$

În expresia (4.117), G este modulul de elasticitate transversal iar I_{te} este constanta torsională a secțiunii transversale. În cazul secțiunilor axial-simetrice, această constantă este momentul de inerție polar.

Similar, matricea de masă coerentă a elementului pentru torsiune este

$$\left[m_t^e \right] = \frac{\rho I_{te} \ell_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{4.118}$$

Pentru elementul de grilaj, combinând elementele matricilor de rigiditate (4.114) şi (4.117), se obține matricea de rigiditate în coordonate locale, care exprimă forțele nodale (4.113) în funcție de deplasările nodale (4.112)

$$\left[k^e\right]=\frac{EI_e}{\ell_e^3}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 4\ell^2 & 6\ell & 0 & 2\ell^2 & -6\ell \\ 0 & 6\ell & 12 & 0 & 6\ell & -12 \\ -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2\ell^2 & 6\ell & 0 & 4\ell^2 & -6\ell \\ 0 & -6\ell & -12 & 0 & -6\ell & 12 \end{bmatrix}_e \tag{4.119}$$

unde $a = GI_{te}\ell_e^2 / EI_e$.

Combinând elementele matricilor de masă (4.115) şi (4.118) se obține matricea de masă coerentă a elementului de grilaj în coordonate locale

$$\left[m^e\right]=\frac{\rho A_e \ell_e}{420}\begin{bmatrix} 2b & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 4\ell^2 & 22\ell & 0 & -3\ell^2 & 13\ell \\ 0 & 22\ell & 156 & 0 & -13\ell & 54 \\ b & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & -3\ell^2 & -13\ell & 0 & 4\ell^2 & -22\ell \\ 0 & 13\ell & 54 & 0 & -22\ell & 156 \end{bmatrix}_e \tag{4.120}$$

în care $b = 70I_{te} / A_e$.

4.4.3 Transformarea coordonatelor

Înaintea asamblării în matricile globale ale grilajului, este necesară transformarea matricilor (4.119) şi (4.120) din sistemul local în sistemul global de coordonate. Deoarece direcția z a axelor locale coincide cu direcția Z a axelor globale, trebuie transformate doar rotirile. Transformarea coordonatelor este definită de relația (4.104)

$$\left\{q^e\right\}=\left[T^e\right]\left\{Q^e\right\}, \tag{4.121}$$

în care $\left\{q^e\right\}$ este vectorul deplasărilor elementului (4.112) în sistemul de coordonate locale,

$$\left\{Q^e\right\}=\left\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6\right\}^T$$

este vectorul deplasărilor elementului în sistemul de coordonate global (fig. 4.32) şi

$$\left[T^e\right]=\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.122}$$

în care $c=\cos\alpha$ şi $s=\sin\alpha$, este *matricea de transformare* (4.105) de la coordonate locale la coordonate globale. Aceeaşi matrice de transformare (4.122) este utilizată pentru forțele nodale.

4.4.4 Matricile elementului de grilaj în coordonate globale

Utilizând aceeaşi metodă ca în § 4.2.4 şi § 4.2.5, se obțin matricile de rigiditate şi de masă ale elementului de grilaj în coordonate globale

$$\left[K^e\right]=\left[T^e\right]^T\left[k^e\right]\left[T^e\right] \tag{4.123}$$

şi

$$\left[M^e\right]=\left[T^e\right]^T\left[m^e\right]\left[T^e\right]. \tag{4.124}$$

Ele pot fi utilizate la asamblarea matricilor de rigiditate şi de masă nereduse, $\left[\overline{K}\right]$ şi $\left[\overline{M}\right]$, folosind matricile de conectivitate ale elementelor $\left[\widetilde{T}^e\right]$ care exprimă deplasările nodale la nivelul elementului în funcție de deplasările nodale la nivelul întregii structuri prin relații de forma (4.108).

La sisteme rezemate, matricile nereduse $\left[\overline{K}\right]$ şi $\left[\overline{M}\right]$ sunt apoi condensate utilizând condițiile la limită. Efectul rigidității arcurilor şi al maselor concentrate poate fi inclus adăugând valorile acestora în pozițiile definite de gradele de libertate respective pe diagonalele principale ale matricilor respective.

Exemplul 4.12

Să se calculeze primele 9 moduri proprii de vibrație ale grilajului din fig. 4.33, rezemat pe patru arcuri de rigiditate $k=1000\ \mathrm{N/m}$ fiecare. Proprietățile sistemului sunt $E=210\ \mathrm{GPa}$, $G=81\ \mathrm{GPa}$, $\rho=7900\ \mathrm{kg/m^3}$, $\ell=0{,}5\ \mathrm{m}$ şi diametrul barelor $d=20\ \mathrm{mm}$.

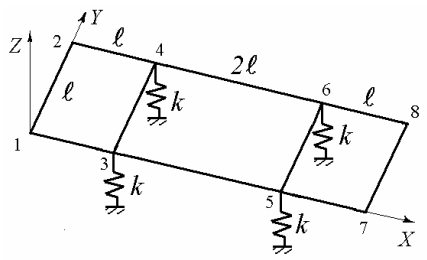


Fig. 4.33

Rezolvare. Grilajul a fost modelat cu 10 elemente şi 8 noduri, având astfel 24 grade de libertate. Formele modurilor proprii, calculate cu programul VIBGRID, sunt prezentate în fig. 4.34 împreună cu valorile frecvențelor proprii.

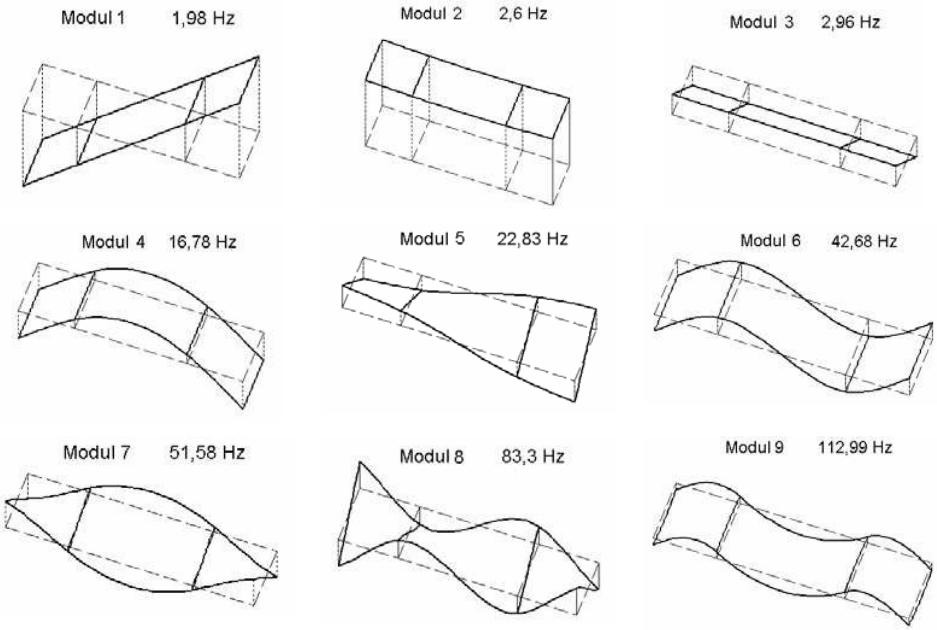


Fig. 4.34

Primele trei moduri de vibrație sunt moduri de ‘corp rigid’, de rotație şi translație ale grilajului nedeformat pe arcurile de suspensie. Modul *4* este ‘primul mod de încovoiere’ (două linii nodale pe lățime), modul *5* este ‘primul mod de torsiune’ (o linie nodală longitudinală), modul *6* este ‘al doilea mod de încovoiere’ (trei linii nodale pe lățime), modul *7* este ‘al doilea mod de torsiune’, modul *8* este ‘al treilea mod de torsiune’ şi modul *9* este ‘al treilea mod de încovoiere’.

Examplul 4.13

Grilajul din fig. 4.35 este încastrat în punctele *1* şi *2,* având $\ell = 1\,\text{m}$, $I = 0{,}785 \cdot 10^{-8}\ \text{m}^4$, $I_t = 1{,}57 \cdot 10^{-8}\ \text{m}^4$, $A = 3{,}14 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$, $\rho = 7900\ \text{kg}/\text{m}^3$, $E = 210\,\text{GPa}$ şi $G = 81\,\text{GPa}$. Să se calculeze primele 9 moduri proprii de vibrație.

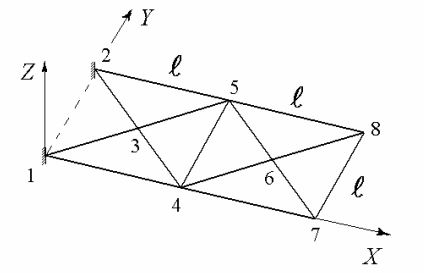


Fig. 4.35

Rezolvare. Grilajul a fost modelat cu 14 elemente şi 8 noduri, având 18 grade de libertate. Formele modurilor proprii calculate cu programul VIBGRID sunt prezentate în fig. 4.36 împreună cu valorile frecvențelor proprii.

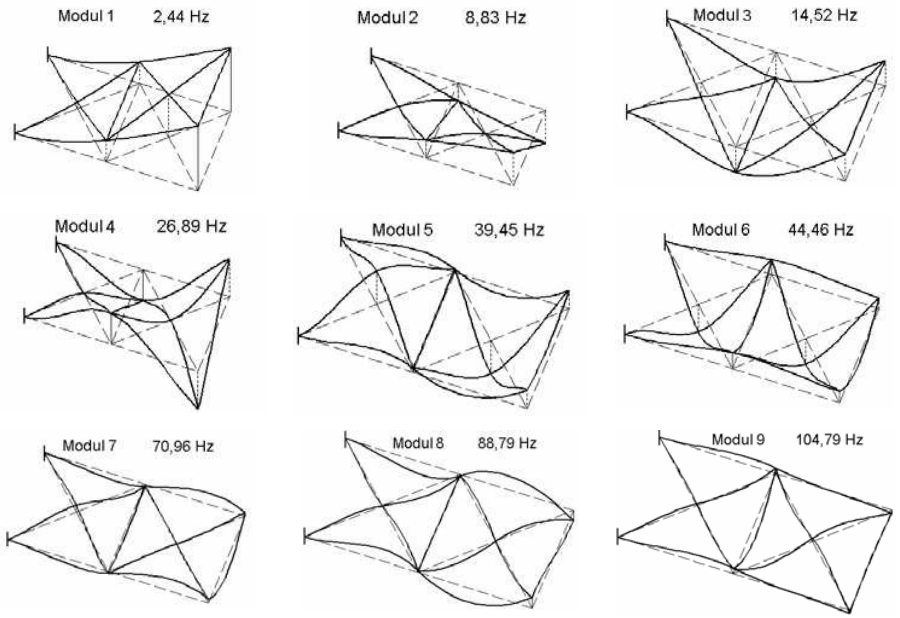


Fig. 4.36

Modul *1* este 'primul mod de încovoiere', modul *2* este 'primul mod de torsiune', modul *3* este 'al doilea mod de încovoiere', modul *4* este 'al doilea mod de torsiune', modul *5* este 'modul al treilea de încovoiere' iar modul *6* este un 'prim mod de încovoiere' față de axa longitudinală.

4.5 Funcţii de răspuns în frecvență

Prima parte a acestui capitol a fost consacrată calculului modurilor proprii de vibrație ale sistemelor neamortizate de ordin relativ mic. În continuare se studiază răspunsul în frecvență al sistemelor amortizate şi se prezintă diagramele funcțiilor de răspuns în frecvență (FRF) ale acestora. Analiza FRF măsurate experimental face obiectul unui capitol din volumul al doilea în care se prezintă *Analiza modală experimentală* şi *Identificarea sistemelor vibratoare*.

4.5.1 Matricea FRF

Pentru un sistem cu amortizare vâscoasă, matricea funcțiilor de răspuns în frecvență (matricea FRF) din (3.143) are forma

$$\left[H\left(\mathrm{i}\omega\right)\right]=\left[\omega^2\left[m\right]+\mathrm{i}\omega\left[c\right]+\left[k\right]\right]^{-1}, \tag{4.125}$$

unde ω este pulsația excitatoare.

Matricea FRF poate fi scrisă

$$\left[H\left(\mathrm{i}\omega\right)\right]=\begin{bmatrix} h_{11}\left(\mathrm{i}\omega\right) & h_{12}\left(\mathrm{i}\omega\right) & \ldots & h_{1n}\left(\mathrm{i}\omega\right) \\ h_{21}\left(\mathrm{i}\omega\right) & h_{22}\left(\mathrm{i}\omega\right) & \ldots & h_{2n}\left(\mathrm{i}\omega\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n1}\left(\mathrm{i}\omega\right) & h_{n2}\left(\mathrm{i}\omega\right) & \ldots & h_{nn}\left(\mathrm{i}\omega\right) \end{bmatrix} \tag{4.126}$$

unde $h_{j\ell}\left(\mathrm{i}\omega\right)$ este răspunsul măsurat la coordonata *j* produs de o forță armonică aplicată la coordonata ℓ.

Există mai multe tipuri de funcții de răspuns în frecvență, după cum răspunsul este o deplasare, viteză sau accelerație (v. § 2.4.7). Utilizând notația complexă, dacă excitația $f_\ell\left(t\right)=\hat{f}_\ell\, e^{\mathrm{i}\omega t}$ produce răspunsul $x_j\left(t\right)=\hat{x}_j\, e^{\mathrm{i}\left(\omega t+\phi\right)}$, atunci receptanța complexă poate fi exprimată prin componentele reală şi imaginară

$$h_{j\ell}\left(\mathrm{i}\omega\right)=\frac{f_\ell}{x_j}=\frac{\hat{f}_\ell}{\hat{x}_j}e^{\mathrm{i}\phi}=\frac{\hat{f}_\ell}{\hat{x}_j}\cos\phi+\mathrm{i}\,\frac{\hat{f}_\ell}{\hat{x}_j}\sin\phi=h_{j\ell}^R\left(\omega\right)+\mathrm{i}\,h_{j\ell}^I\left(\omega\right).$$

Raportul f_ℓ / x_ℓ se numeşte *receptanță directă* (receptanța în punctul de aplicare a forței), în timp ce raportul $f_\ell / x_j \quad (j \neq \ell)$ se numeşte *receptanță de transfer* sau *inter-receptanță* după cum *j* este o coordonată în alt punct, sau în acelaşi punct ca ℓ dar pe altă direcție.

De notat că FRF sunt mărimi măsurabile care pot fi determinate prin încercări cu excitație armonică.

4.5.2 Diagramele FRF

FRF sunt mărimi complexe, definite de trei cantități – frecvența plus părțile reală şi imaginară (sau modulul şi faza) – care sunt reprezentate grafic.

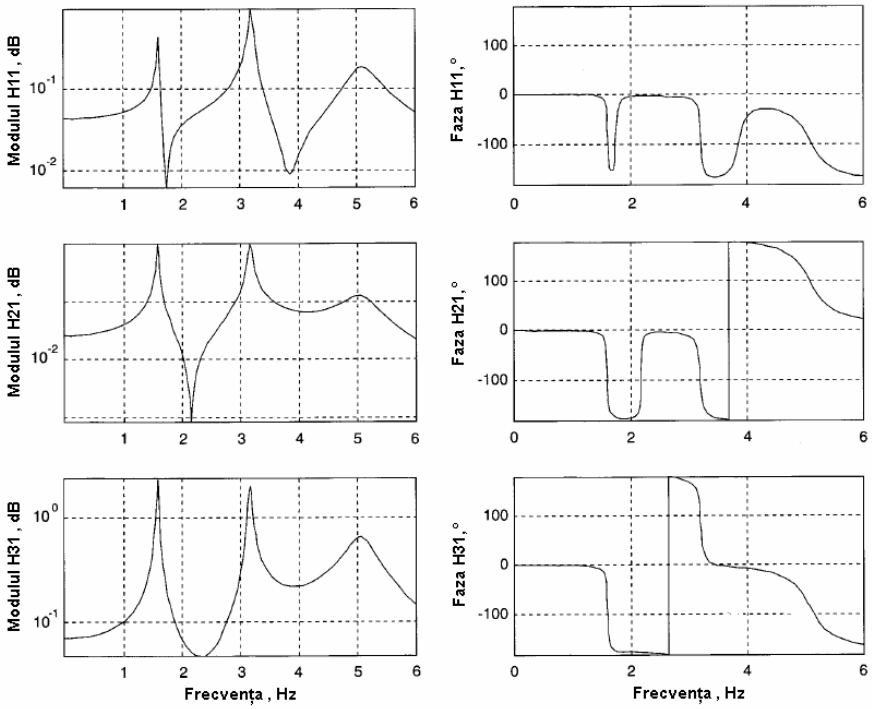


Fig. 4.37

Cele trei formate grafice de prezentare a FRF sunt: a) diagramele Bodé (modulul în funcție de frecvență şi faza în funcție de frecvență); b) diagramele componentelor în fază şi în cuadratură (componenta reală în funcție de frecvență şi componenta imaginară în funcție de frecvență); şi c) diagramele Nyquist (partea imaginară în funcție de partea reală, eventual cu gradații la intervale egale de frecvență).

Graficele includ FRF de tipul mişcare/forţă, cum sunt receptanţa, mobilitatea şi inertanţa (acceleranţa), şi inversele acestora (forţă/mişcare), rigiditatea dinamică, impedanţa şi masa dinamică (v. § 2.4.7). Diagramele pot avea scară liniară, logaritmică sau semilogaritmică, cu sau fără caroiaj, cu unul sau două cursoare, posibilităţi de 'zoom' sau de suprapunere a mai multor curbe.

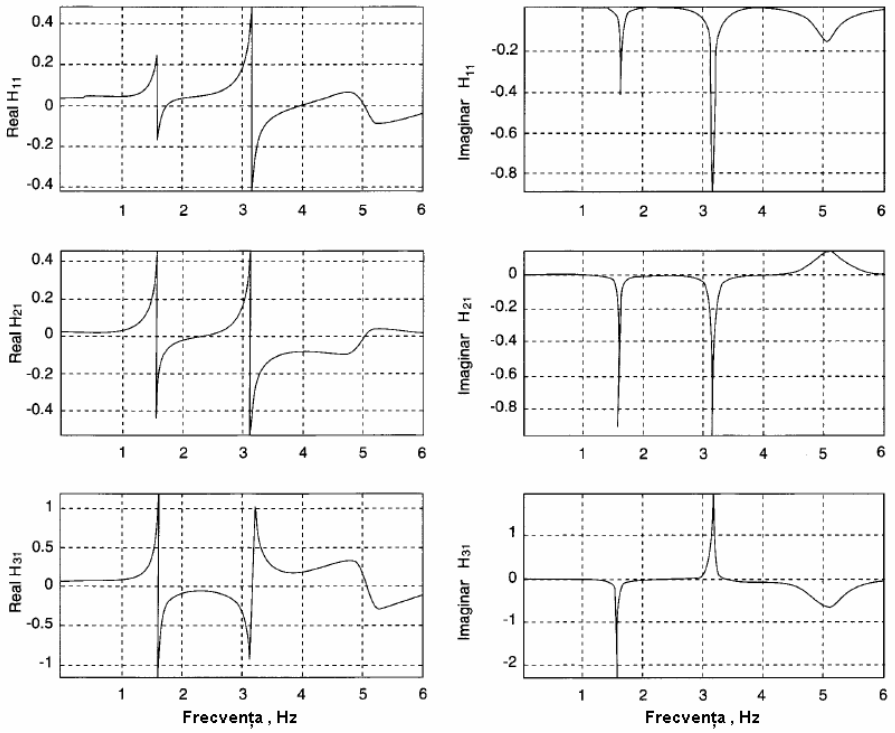


Fig. 4.38

În fig. 4.37 se prezintă diagramele Bodé ale receptanţelor unui sistem amortizat cu trei grade de libertate, pentru deplasări măsurate în g.d.l. *1*, *2*, şi *3*, produse de o forţă aplicată în g.d.l. *1*. Diagramele modùlului au scară verticală logaritmică, necesară pentru detalierea răspunsului de nivel relativ scăzut din vecinătatea antirezonanţelor.

În fig. 4.38 se arată diagramele componentelor reală (în fază) şi imaginară (în cuadratură) ale aceloraşi receptanţe, iar în prima coloană a fig. 4.39 se arată diagramele Nyquist corespunzătoare. Se observă că, la sisteme slab amortizate şi cu frecvenţe proprii relativ depărtate, buclele răspunsului în vecinătatea rezonanţelor pot fi aproximate cu cercuri.

Pentru comparaţie, în coloanele a doua şi a treia din fig. 4.39 sunt prezentate diagramele mobilităţilor şi inertanţelor, pentru aceleaşi FRF. Se observă

rotirea acestora cu 90^0, respectiv 180^0, în planul complex, datorită defazajului între deplasare, viteză şi acceleraţie.

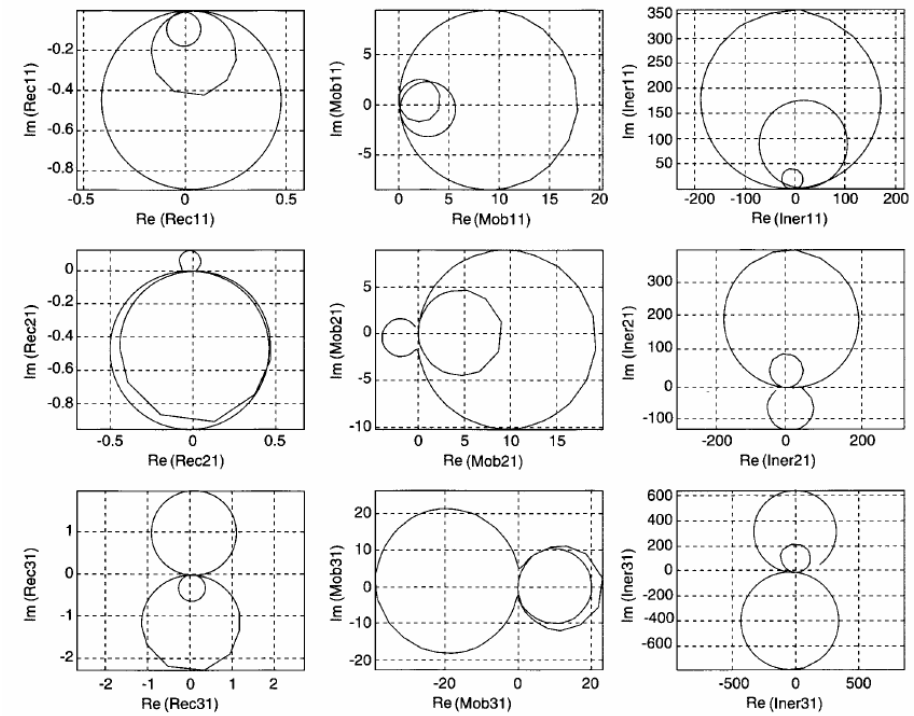


Fig. 4.39

În fig. 4.40 se prezintă o diagramă tridimensională a receptanței directe h_{11}, împreună cu diagramele Nyquist şi ale părților reală şi imaginară.

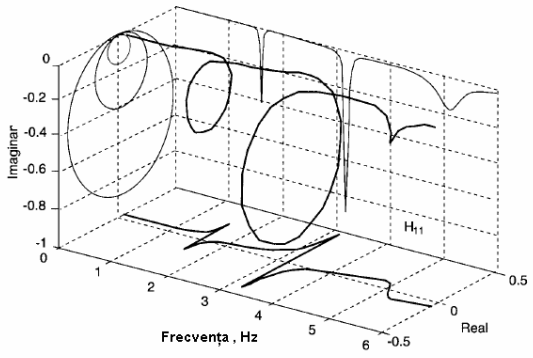


Fig. 4.40

La sisteme slab amortizate şi cu densitate modală mică, vârfurile din diagramele FRF ale modulului şi componentei imaginare ale receptanței, mobilității sau acceleranței indică *rezonanțe*. Un sistem cu *n* grade de libertate, cu moduri de vibrație cu amortizare subcritică, are *n* rezonanțe. Adesea, simpla analiză vizuală a diagramelor FRF permite estimarea ordinului sistemului, prin numărarea vârfurilor de rezonanță din domeniul frecvențelor de interes.

Aşa cum s-a arătat pentru sisteme cu două grade de libertate (fig. 3.49), la sisteme cu amortizare mare şi/sau frecvențe proprii relativ apropiate este posibil ca diagramele FRF să nu aibă vârfuri la unele rezonanțe. La sisteme cu amortizare moderată, cea mai precisă localizare a rezonanțelor se face pe diagramele Nyquist, în punctele în care viteza de variație cu frecvența a unghiului de fază (sau a lungimii arcului de cerc) are un maxim local. Dacă o astfel de diagramă este gradată la creşteri egale ale frecvenței excitatoare, rezonanța poate fi localizată acolo unde distanța între două puncte succesive este maximă (ca în fig. 3.48).

Antirezonanțele apar ca minime pronunțate în diagramele modulului FRF de tipul mişcare/forță. La o FRF directă, rezonanțele şi antirezonanțele alternează (teorema reactanțelor a lui Foster). Între două vârfuri de rezonanță apare un minim pronunțat de antirezonanță. La o FRF de transfer, unele sau toate antirezonanțele sunt înlocuite de minime aplatisate. Numărul şi poziția antirezonanțelor variază în diagramele FRF calculate în alte puncte sau pe alte direcții.

În fig. 4.41 se prezintă diagramele receptanțelor unei structuri, calculate în acelaşi punct dar pentru trei direcții diferite. Figura ilustrează alinierea vârfurilor de rezonanță precum şi numărul şi poziția diferită a minimelor de antirezonanță. Curba de sus, la care rezonanțele şi antirezonanțele alternează, este a unei receptanțe directe.

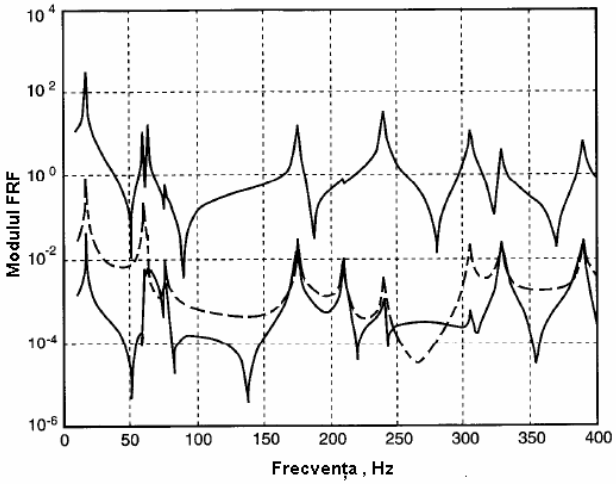
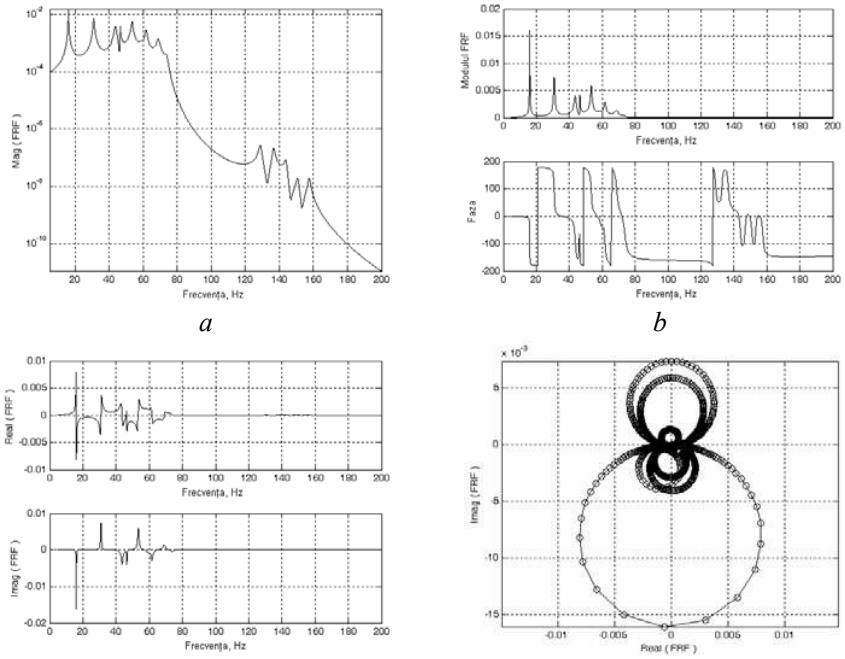


Fig. 4.41

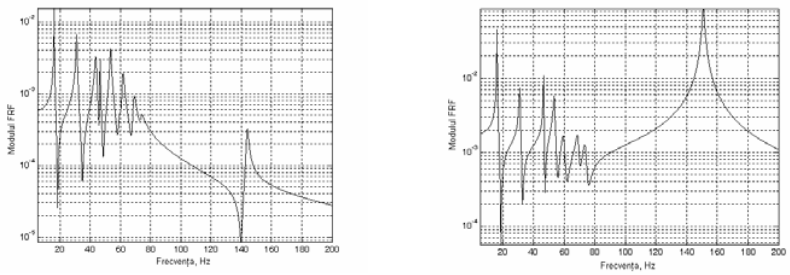
În fig. 4.42 sunt redate diagramele receptanței $h_{3,15}$ calculate pentru sistemul cu 15 grade de libertate din Exemplul 4.8 (fig. 4.17).



a *b* *c* *d*

Fig. 4.42

Comparând frecvențele vârfurilor de rezonanță cu frecvențele proprii date în Tabelul 4.2, se remarcă grupul celor mai mari cinci frecvențe proprii, care apar distincte în pofida valorilor reduse ale răspunsului, datorită scării logaritmice (fig. 4.42, *a*). Dintre celelalte zece rezonanțe, se pot distinge doar nouă, modurile cu frecvențe relativ apropiate la 53,35 Hz şi 53,42 Hz producând un singur vârf, în timp ce rezonanțele de la 59,45 Hz şi 73,72 Hz sunt aproape estompate.



a *b*

Fig. 4.43

Individualizarea vârfurilor de rezonanță depinde de rezoluția în frecvență a datelor reprezentate grafic. La curbe FRF calculate pentru puncte diferite de răspuns şi excitare, de exemplu funcția h_{11} în fig. 4.43, *a* şi funcția h_{66} în fig. 4.43, *b*, unele vârfuri pot lipsi.

Probleme

4.E1 Să se calculeze frecvențele proprii şi forma modurilor proprii de vibrație ale sistemului din fig. 4.E1. Se consideră $k = 10^6\ \mathrm{N/m}$, $m_1 = m_4 = m_7 = 0{,}5\ \mathrm{kg}$, $m_2 = m_5 = m_9 = 1{,}5\ \mathrm{kg}$, $m_3 = m_6 = m_8 = 1\ \mathrm{kg}$.

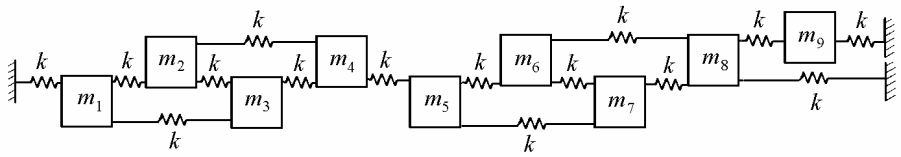


Fig. 4.E1

Răspuns: $f_1 = 73{,}5\ \mathrm{Hz}$, $f_2 = 124{,}62\ \mathrm{Hz}$, $f_3 = 174{,}78\ \mathrm{Hz}$, $f_9 = 433{,}46\ \mathrm{Hz}$.

4.E2 Să se calculeze modurile proprii de vibrație ale sistemului din fig. 4.E2, considerând $m_j = 1\ \mathrm{kg}\quad (j = 1,...,12)$, $k_j = 100\ \mathrm{N/m}\quad (j = 1,...,11)$, $k_{12} = 102\ \mathrm{N/m}$. Să se compare rezultatele cu cele obținute pentru $k_{12} = 100\ \mathrm{N/m}$.

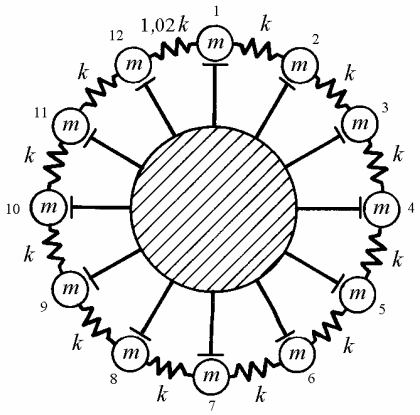


Fig. 4.E2

Răspuns: a) $f_2 = 0{,}824\ \mathrm{Hz}$, $f_3 = 0{,}828\ \mathrm{Hz}$, $f_4 = 1{,}591\ \mathrm{Hz}$, $f_5 = 1{,}594\ \mathrm{Hz}$.

b) $f_2 = f_3 = 0{,}824$ Hz, $f_4 = f_5 = 1{,}591$ Hz, $f_6 = f_7 = 2{,}251$Hz.

4.E3 Să se calculeze frecvențele proprii şi rapoartele de amortizare modale ale sistemului cu 10 g.d.l. din fig. 4.E3. Apoi să se calculeze frecvențele proprii neamortizate şi formele modale corespunzătoare. Parametrii sistemului sunt: $m_1 = 1{,}21$, $m_2 = 1{,}44$, $m_3 = 1{,}69$, $m_4 = 1{,}96$, $m_5 = 2{,}25$, $m_6 = 2{,}56$, $m_7 = 2{,}89$, $m_8 = 3{,}24$, $m_9 = 3{,}61$, $m_{10} = 4$ kg, $k_1 = 1100$, $k_2 = 1200$, $k_3 = 1300$, $k_4 = 1400$, $k_5 = 1500$, $k_6 = 1600$, $k_7 = 1700$, $k_8 = 1800$, $k_9 = 1900$, $k_{10} = 2000$ N/m, $c_j = 0{,}002\,k_j$ $(j = 1,...,10)$.

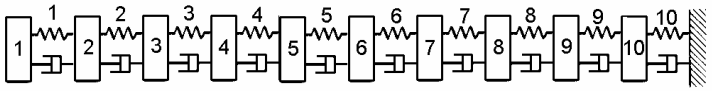


Fig. 4.E3

Răspuns: $f_1 = 0{,}718$Hz, $\zeta_1 = 0{,}45\%$, $f_{10} = 8{,}34$Hz, $\zeta_{10} = 5{,}24\%$.

4.E4 La sistemul cu 15 g.d.l. din fig. 4.E4 să se calculeze frecvențele proprii amortizate şi rapoartele de amortizare modale.

Mase	
0,0013 kg	11-15
0,026 kg	celelalte
Rigidități	
100 N/m	1-17
1100 N/m	18
900 N/m	19
1200 N/m	20
800 N/m	21
Coeficienți de amortizare	
0,1 Ns/m	1-11
0,01 Ns/m	12-21

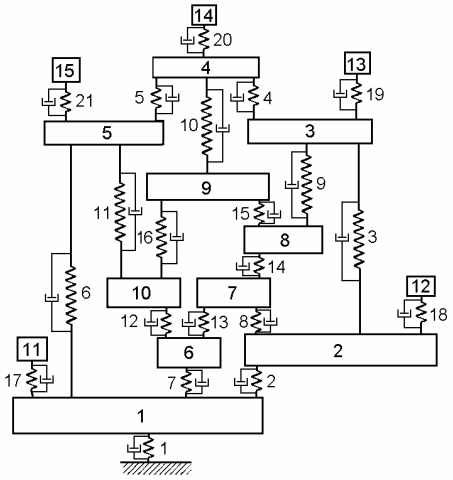


Fig. 4.E4

Răspuns: $f_1 = 2{,}65$Hz, $\zeta_1 = 0{,}81\%$, $f_{15} = 156{,}73$Hz, $\zeta_{15} = 0{,}44\%$.

4.E5 O structură în formă de scară este fixată la ambele capete ca în fig. 4.E5. Masa fiecărei trepte este *m* iar rigiditatea laterală între două trepte este *k*. Să se calculeze pulsațiile proprii şi să se traseze forma modurilor proprii de vibrație.

Răspuns: $\omega_1 = 0{,}517\sqrt{k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{k/m}$, $\omega_3 = 1{,}414\sqrt{k/m}$, $\omega_4 = 1{,}732\sqrt{k/m}$,

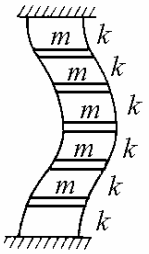


Fig. 4.E5

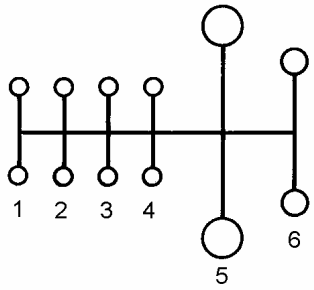


Fig. 4.E6

4.E6 Un motor cu cinci cilindri şi volant este folosit la antrenarea unui generator electric. Pentru calculul frecvențelor proprii de torsiune, sistemul real este modelat prin sistemul echivalent prezentat în fig. 4.E6. Să se determine primele patru moduri proprii de vibrație şi să se traseze formele modale utilizând următoarele valori: $K_{12} = K_{23} = K_{34} = 2{,}2\ \mathrm{MNm/rad}$, $K_{45} = 0{,}9\ \mathrm{MNm/rad}$, $K_{56} = 0{,}24\ \mathrm{MNm/rad}$, $J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = 0{,}51\ \mathrm{kg\,m^2}$, $J_5 = 5{,}3\ \mathrm{kg\,m^2}$, $J_6 = 4{,}4\ \mathrm{kg\,m^2}$.

Răspuns: $f_2 = 46{,}21\ \mathrm{Hz}$, $f_3 = 106{,}11\ \mathrm{Hz}$, $f_4 = 291{,}41\ \mathrm{Hz}$, $f_5 = 481{,}45\ \mathrm{Hz}$.

4.E7 Sistemul torsional din fig. 4.E7 modelează un motor diesel cu opt cilindri şi volant, transmisia cu roți dințate şi elicea vaporului. Să se determine primele trei moduri proprii ale vibrațiilor torsionale utilizând următoarele valori: $n_A = 405\ \mathrm{rot/min}$, $n_B = 225\ \mathrm{rot/min}$, $J_9 = 602\ \mathrm{kg\,m^2}$, $J_{10} = 91\ \mathrm{kg\,m^2}$, $J_{11} = 1953\ \mathrm{kg\,m^2}$, $J_{12} = 4331\ \mathrm{kg\,m^2}$, $J_1 = J_2 = \ldots = J_8 = 184\ \mathrm{kg\,m^2}$, $K_{89} = 116\ \mathrm{MNm/rad}$, $K_{9,10} = 13{,}5\ \mathrm{MNm/rad}$, $K_{10,11} = 185\ \mathrm{MNm/rad}$ (redusă la n_B), $K_{11,12} = 0{,}846\ \mathrm{MNm/rad}$, $K_{12} = K_{23} = \ldots = K_{78} = 84\ \mathrm{MNm/rad}$ (G. Ziegler, 1977).

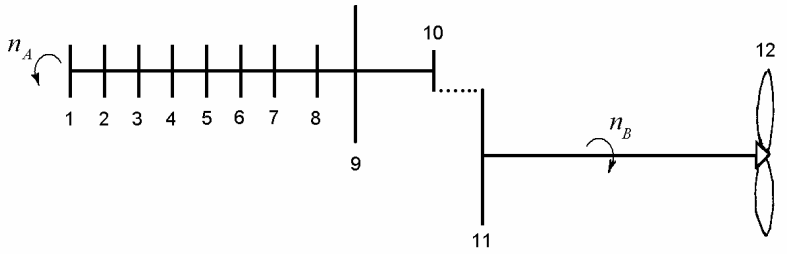


Fig. 4.E7

Răspuns: $f_2 = 2{,}68$ Hz, $f_3 = 20{,}60$ Hz, $f_4 = 35{,}81$Hz.

4.E8 Să se determine primele două frecvențe proprii (nenule) ale sistemului torsional al unui autovehicul modelat ca în fig. 4.E8, pentru următoarele valori ale momentelor de inerție şi rigidităților torsionale: $K_1 = 2$ MNm/rad, $K_2 = 1{,}6$ MNm/rad, $K_3 = 1$ MNm/rad, $K_4 = 4$ MNm/rad, $J_1 = 15$ kg m^2, $J_2 = 10$ kg m^2, $J_3 = 18$ kg m^2, $J_4 = 6$ kg m^2. Raportul de transmisie al angrenajului conic din diferențial este 4 : 1.

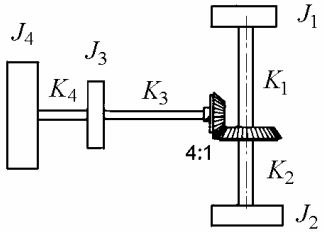


Fig. 4.E8

Răspuns: $f_2 = 55{,}26$ Hz, $f_3 = 62{,}32$ Hz.

4.E9 Sistemul de antrenare a paletelor unui mixer industrial este ilustrat în fig. 4.E9. Roțile conice au fiecare 20 dinți, două roți cilindrice au 36 dinți iar pinionul comun are 12 dinți. Să se calculeze frecvențele proprii ale vibrațiilor torsionale ale sistemului, utilizând valorile $G = 81$GPa, $d = 19$mm, $J_1 = 22{,}6 \cdot 10^{-3}$ kg m^2, $J_2 = J_3 = 5{,}65 \cdot 10^{-3}$kg m^2, $J_4 = 11{,}3 \cdot 10^{-3}$kg m^2, $J_5 = J_6 = 56{,}5 \cdot 10^{-3}$kg m^2, $J_7 = J_8 = 90{,}4 \cdot 10^{-3}$kg m^2, $\ell_1 = \ell_2 = 0{,}915$ m, $\ell_3 = 1{,}016$ m (James *et al*., 1989).

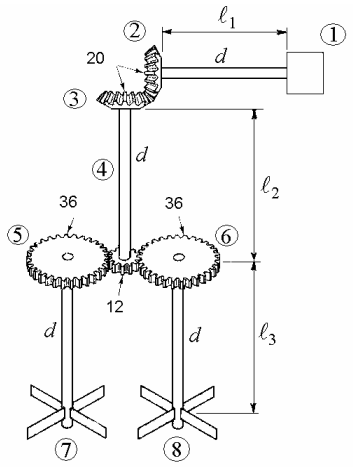


Fig. 4.E9

Răspuns: $f_2 = 16{,}90$ Hz, $f_3 = 18{,}41$ Hz, $f_4 = 37{,}39$ Hz, $f_5 = 79{,}61$ Hz.

4.E10 Să se calculeze modurile proprii ale vibrațiilor laterale ale grinzilor cu masa neglijabilă din fig. 4.E10.

a *b*

Fig. 4.E10

Răspuns: a) Matricea de flexibilitate este

$$[\delta] = \frac{m\ell^3}{3750EI}\begin{bmatrix} 32 & 45 & 40 & 23 \\ 45 & 72 & 68 & 40 \\ 40 & 68 & 72 & 45 \\ 23 & 40 & 45 & 32 \end{bmatrix}.$$

Pulsațiile proprii sunt $\omega_1 = 4{,}4126\sqrt{EI/m\ell^3}$, $\omega_2 = 17{,}611\sqrt{EI/m\ell^3}$, $\omega_3 = 38{,}986\sqrt{EI/m\ell^3}$, $\omega_4 = 64{,}1997\sqrt{EI/m\ell^3}$.

b) $\omega_1 = 0{,}647\sqrt{EI/m\ell^3}$, $\omega_2 = 2{,}482\sqrt{EI/m\ell^3}$, $\omega_3 = 5{,}65\sqrt{EI/m\ell^3}$.

4.E11 Să se determine primele opt moduri proprii de vibrație coplanară ale grinzilor cu zăbrele din fig. 4.E11. Barele au secțiunea transversală $\Phi 6 \times 1\,\text{mm}$ şi $\ell = 0{,}3\,\text{m}$, $E = 72{,}7\ \text{GPa}$, $\rho = 3100\ \text{kg}/\text{m}^3$. Toate masele sunt $m = 0{,}6\ \text{kg}$.

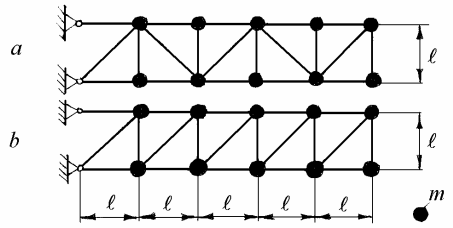


Fig. 4.E11

Răspuns: a) 20,51; 83,31; 111,49; 164,82; 215,10; 265,74; 299,27; 361,48 Hz.

b) 20,02; 79,07; 117,04; 163,05; 231,06; 272,94; 290,24; 358,46 Hz.

4.E12 La grinda cu zăbrele din fig.4.E12 să se determine primele şase frecvențe proprii şi formele modale respective, dacă $E = 210\ \text{GPa}$, $\rho = 7800\ \text{kg}/\text{m}^3$, $l = 2\ \text{m}$, $A = 2000\ \text{mm}^2$.

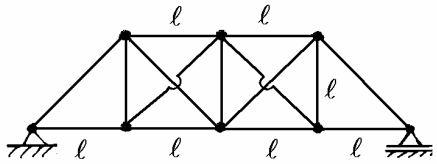


Fig. 4.E12

Răspuns: $f_1 = 74{,}61\ \text{Hz}$, $f_2 = 142{,}24\ \text{Hz}$, $f_3 = 237{,}22\ \text{Hz}$, $f_6 = 529{,}15\ \text{Hz}$.

4.E13 Să se determine primele 20 moduri proprii de vibrație ale grinzii continue cu patru deschideri egale din fig. 4.E13 şi să se comenteze gruparea frecvențelor proprii. Se consideră $E = 208\ \text{GPa}$, $\rho = 7850\ \text{kg}/\text{m}^3$, $l = 1\ \text{m}$ şi secțiune transversală dreptunghiulară cu $b = 2h = 40\ \text{mm}$.

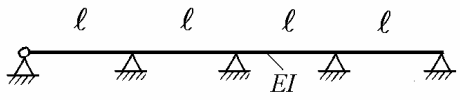
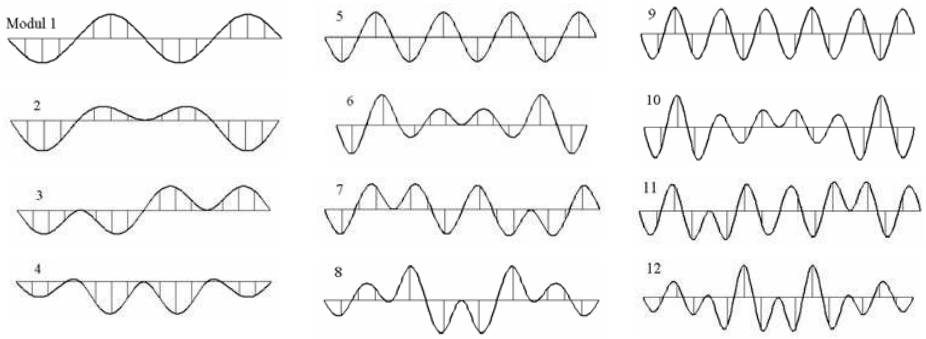


Fig. 4.E13

Răspuns: 46,69; 54,48; 72,98; 94,33 Hz, 187,48; 203,59; 237,82; 274,84 Hz, 427,85; 452,63; 504,23; 557,66 Hz, 829,07; . . . , 1043,98 Hz.



4.E14 O grindă simplu rezemată cu două deschideri (fig. 4.E14) are un arc de răsucire la suportul din mijloc. Rigiditatea acestuia este $K = 500\,EI/\ell$, unde EI este modulul de rigiditate la încovoiere al grinzii şi ℓ este lungimea totală. a) Să se calculeze modurile proprii ale vibrațiilor transversale ale grinzii cu deschideri de lungimi egale $(\Delta = 0)$. Să se comenteze gruparea frecvențelor proprii. b) Se consideră o grindă cvasiperiodică cu cuplaj slab, cu lungimile deschiderilor $\ell(0{,}5-\Delta)$ şi $\ell(0{,}5+\Delta)$, unde $\Delta = 0{,}01$. Să se explice fenomenul de localizare în structuri mecanice dezordonate. c) Să se extindă analiza la grinzi cvasiperiodice cu trei şi patru deschideri.

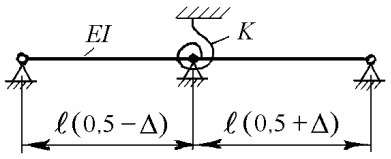


Fig. 4.E14

4.E15 O grindă de secțiune constantă simplu rezemată are lungimea $3\,\mathrm{m}$, masa pe unitatea de lungime $15\ \mathrm{kg/m}$, modulul de rigiditate la încovoiere $4\,\mathrm{kNm}^2$ şi $E = 200\,\mathrm{GPa}$. Să se reprezinte grinda prin patru elemente finite şi să se calculeze primele patru frecvențe proprii presupunând: a) masa concentrată la mijlocul fiecărui element; b) câte o jumătate din masa fiecărui element plasată la capetele elementului; c) masa uniform distribuită în lungul grinzii (matrice de masă coerentă). Să se compare rezultatele cu cele calculate cu formula lui Rayleigh, utilizând o funcție "sinus" pentru deformata grinzii, şi cu formula lui Dunkerley. Să se traseze forma modurilor proprii de vibrație pentru cazul (c).

4.E16 Utilizând metoda elementelor finite, să se calculeze primele două frecvențe proprii ale vibrațiilor transversale ale unei grinzi în consolă, de secțiune constantă. Să se modeleze grinda cu 1, 2, 3, 4, 5 şi 6 elemente de lungime egală şi să se compare frecvențele proprii astfel obținute cu valorile adevărate.

4.E17 Un arbore din oțel (fig. 4.E17) cu diametrul $d = 40\,\text{mm}$ şi lungimea $\ell = 1{,}2\,\text{m}$ este rezemat în două lagăre de rigidități $k_1 = 4\,\text{N}/\mu\text{m}$ şi $k_2 = 6\,\text{N}/\mu\text{m}$. Cele două discuri au masele $m_1 = 400\,\text{kg}$ şi $m_2 = 600\,\text{kg}$, şi razele de inerție $r_1 = 0{,}3\,\text{m}$ şi respectiv $r_2 = 0{,}5\,\text{m}$. Să se determine: a) frecvențele proprii ale vibrațiilor laterale, şi b) primele patru forme modale, considerând $E = 210\,\text{GPa}$ şi $\rho = 7850\,\text{kg}/\text{m}^3$.

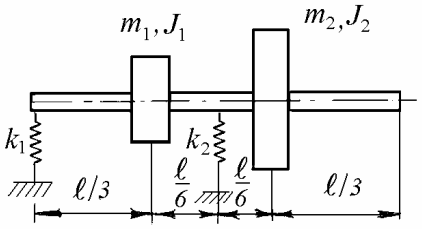
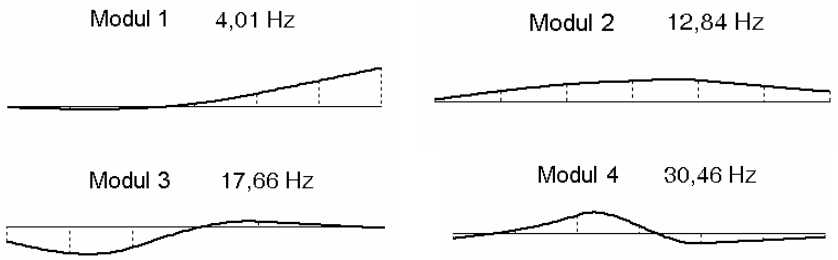


Fig. 4.E17

Răspuns:



4.E18 Arborele din oțel din fig. 4.E18 este simplu rezemat în lagăre scurte. a) Să se calculeze frecvența proprie fundamentală cu formula lui Rayleigh. b) Să se compare rezultatul cu cel obținut utilizând un model cu parametri concentrați. c) Să se calculeze primele două frecvențe proprii cu ajutorul programului VIBFRAME, considerând $E = 210\,\text{GPa}$ şi $\rho = 7850\,\text{kg}/\text{m}^3$.

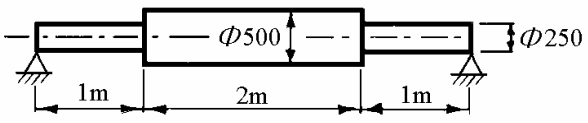


Fig. 4.E18

Răspuns: $f_1 = 36{,}76$ Hz, $f_2 = 120{,}43$ Hz.

4.E19 Să se determine primele două frecvențe proprii ale barei cotite din fig. 4.E19 şi să se traseze forma modurilor proprii de vibrație în planul barei. a) Se consideră $AB = CD = \ell$ şi $BC = 0$. Cele două bare se modelează fiecare cu cel puțin trei elemente finite. b) Pentru $AB = CD = \ell$ şi $BC = \ell/10$ să se compare frecvențele proprii cu cele calculate la (a).

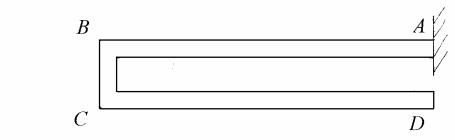


Fig. 4.E19

Răspuns: a) $f_1 = f_2 = 11{,}71$ Hz. b) $f_1 = 10{,}45$ Hz, $f_2 = 10{,}69$ Hz.

4.E20 Să se calculeze primele opt frecvențe proprii şi formele modale corespunzătoare pentru vibrațiile coplanare ale cadrului din fig. 4.E20 cu următoarele proprietăți: $A_{vert} = 0{,}006\,\text{m}^2$, $A_{oriz} = 0{,}004\,\text{m}^2$, $A_{diag} = 0{,}003\,\text{m}^2$, $I = 0{,}0756\,\text{m}^4$, $E = 75$ GPa şi $\rho = 2800\,\text{kg}/\text{m}^3$.

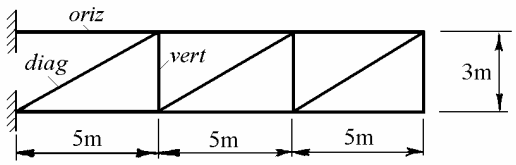


Fig. 4.E20

R. Folosind 48 elemente şi 44 noduri (4 elemente pentru o bară), frecvenţele proprii sunt 45,15; 79,07; 227,72; 249,94; 365,62; 444,03; 452,83; 476,83 Hz.

4.E21 Să se determine primele 12 moduri proprii ale vibraţiilor laterale coplanare ale crucii duble din fig. 4.E21. Cele opt bare au lungimea $\ell = \sqrt{50}$ m şi secţiunea transversală un pătrat cu latura $0{,}125\,\mathrm{m}$. Capetele exterioare sunt articulate iar cele interioare sunt încastrate într-un punct comun. Proprietăţile materialului sunt $E = 200\,\mathrm{GPa}$ şi $\rho = 8000\,\mathrm{kg/m^3}$. Se recomandă modelarea fiecărui braţ cu mai mult de două elemente finite de tip *beam*.

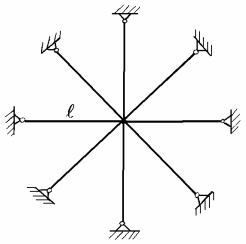
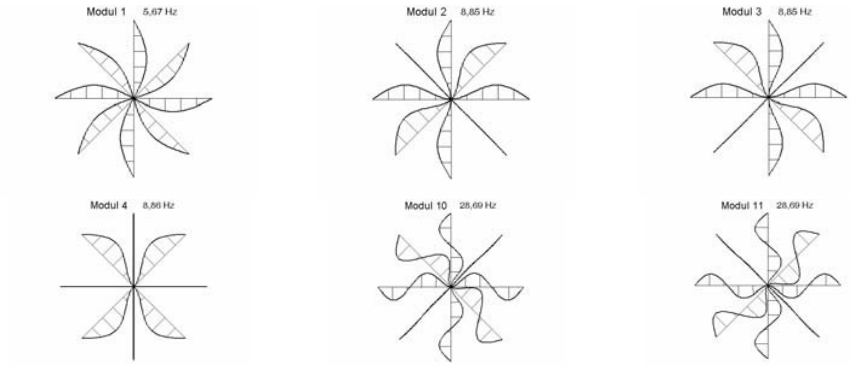


Fig. 4.E21

Răspuns: $f_1 = 5{,}6687$ Hz, $f_2 = f_3 = 8{,}8485$ Hz, $f_4 = \ldots = f_8 = 8{,}8856\,\mathrm{Hz}$.



4.E22 La sistemul din fig. 4.E22, modelat ca grilaj orizontal, să se calculeze primele patru moduri proprii de vibraţie. Se consideră $\ell = 0{,}25\,\mathrm{m}$, $\ell_1 = 0{,}2\,\mathrm{m}$, $E = 210\,\mathrm{GPa}$, $\nu = 0{,}3$ şi $\rho = 7850\,\mathrm{kg/m^3}$. Barele au secţiunea transversală un pătrat cu latura $a = 5\,\mathrm{mm}$ şi $I_t = 0{,}141a^4$.

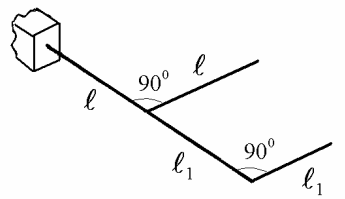
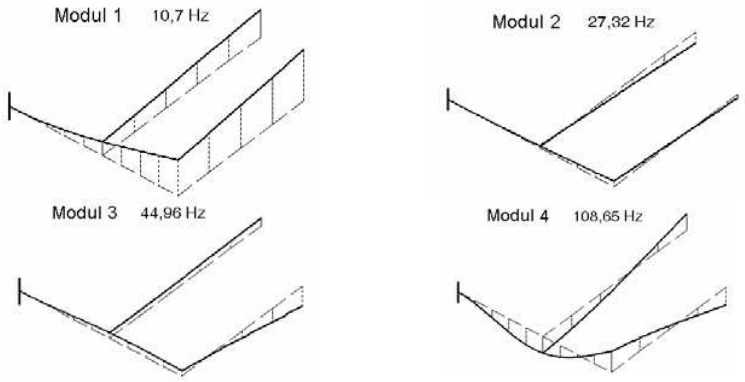


Fig. 4.E22

Răspuns: $f_1 = 10{,}69$ Hz, $f_2 = 27{,}31$ Hz, $f_3 = 44{,}96$ Hz, $f_4 = 108{,}65$ Hz.



4.E23 Să se determine primele şase moduri proprii de vibraţie ale grilajului din fig. 4.E23. Se consideră $\ell = 50$ mm, $E = 210$ GPa, $G = 80$ GPa, $\rho = 7800$ kg/m^3 şi secţiuni transversale circulare cu diametrul $d = 5$ mm.

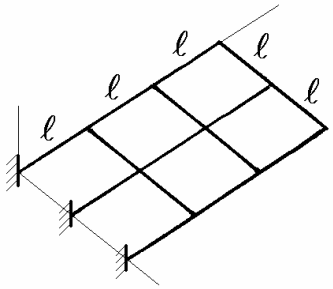
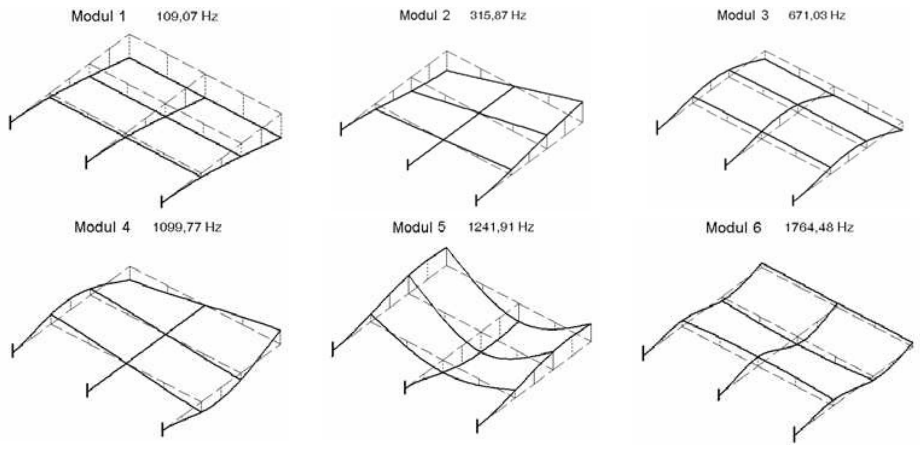


Fig. 4.E23

Răspuns: Primele şase forme modale sunt prezentate în continuare.



4.E24 Grilajul din fig. 4.E24 este realizat astfel: a) o bară orizontală *ABC* din oțel, cu modulul de rigiditate la încovoiere $2{,}5\cdot 10^7\,\mathrm{Nm}^2$, modulul de rigiditate la răsucire $1{,}92\cdot 10^7\,\mathrm{Nm}^2$ şi masa pe unitatea de lungime $300\ \mathrm{kg/m}$; b) două bare orizontale *EBD* şi *GCF* din oțel, încastrate rigid în bara *ABC*, cu modulul de rigiditate la încovoiere $5\cdot 10^7\,\mathrm{Nm}^2$ şi masa pe unitatea de lungime $500\ \mathrm{kg/m}$; c) mase de $500\,\mathrm{kg}$ în *E* şi *D*, şi mase de $250\,\mathrm{kg}$ în *G* şi *F*. Se neglijează momentele de inerție ale acestor mase. Se consideră $E = 210\,\mathrm{GPa}$, $G = 81\,\mathrm{GPa}$ şi $\rho = 7850\ \mathrm{kg/m}^3$. Se cer primele şase frecvențe proprii de vibrație.

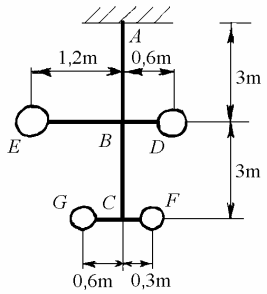


Fig. 4.E24

Răspuns: 2,35; 10,39; 13,39; 36,16; 63,25; 105,22 Hz.

5.
SISTEME CONTINUE

Când masa şi elasticitatea unui sistem în vibraţie sunt distribuite în tot sistemul, pentru descrierea configuraţiei acestuia este necesar un număr infinit de coordonate. Astfel de sisteme au un număr infinit de grade libertate, deci un număr infinit de frecvenţe proprii şi forme modale proprii.

În acest capitol se studiază vibraţiile barelor cu masă şi elasticitate distribuite, din materiale elastice, omogene şi izotrope. Se tratează doar câteva cazuri simple care pot constitui exemple de referinţă pentru problemele rezolvate cu ajutorul calculatorului numeric. Vibraţiile plăcilor sunt tratate în partea a doua a lucrării.

5.1 Vibraţiile laterale ale barelor zvelte

În continuare se vor adopta ipotezele uzuale din teoria încovoierii simple, denumită curent teoria Bernoulli-Euler a barelor: a) bara este iniţial dreaptă; b) grosimea barei este mică în comparaţie cu raza sa de curbură în secţiunea cu deplasare maximă; c) secţiunile transversale plane rămân plane în toate fazele unei vibraţii; d) una dintre axele principale de inerţie ale secţiunii este perpendiculară pe direcţia mişcării; e) nu există forţe axiale; f) deformaţiile transversale datorite forfecării sunt neglijabile; g) masa barei este concentrată în axa neutră. Ultimele două ipoteze arată că se neglijează efectele forfecării şi inerţiei la rotaţie.

5.1.1 Ecuaţia diferenţială a mişcării

Deplasarea laterală a barei este o funcţie de spaţiu şi de timp, $v = v(x, t)$. Relaţia între momentul încovoietor şi curbură (4.65) devine

$$M(x,t) = EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{5.1}$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinal al materialului barei şi I_z este momentul de inerție axial al secțiunii transversale, față de axa principală de inerție cuprinsă în planul neutru.

Din ecuațiile de echilibru ale unui element de bară infinitezimal (fig. 5.1), se obțin relațiile între momentul încovoietor, forța tăietoare şi sarcina distribuită exterioară.

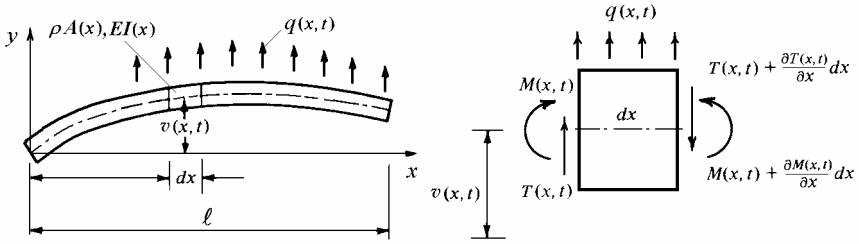


Fig. 5.1

Forța tăietoare este dată de

$$T(x,t)=\frac{\partial M}{\partial x}=EI_z\,\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}. \tag{5.2}$$

Sarcina transversală pe unitatea de lungime este

$$p(x,t)=\frac{\partial T}{\partial x}=EI_z\,\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}. \tag{5.3}$$

Aceasta constă din două componente, sarcina transversală exterioară aplicată barei $q(x,t)$ şi sarcina transversală inerțială (masa pe unitatea de lungime înmulțită cu accelerația) $-\rho A\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}$. Înlocuind

$$p(x,t)=q(x,t)-\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

în ecuația (5.3) se obține ecuația diferențială a mişcării

$$EI_z\,\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=q(x,t). \tag{5.4}$$

5.1.2 Moduri proprii de vibrație

În cazul vibrațiilor libere $q(x,t)=0$. Interesează condițiile în care $v(x,t)$ defineşte o mişcare armonică sincronă

$$v(x,t)=V(x)\sin(\omega t+\phi). \tag{5.5}$$

Înlocuind soluția (5.5) în ecuația (5.4), rezultă pentru $q=0$

$$\frac{\mathrm{d}^4V}{\mathrm{d}x^4}-\omega^2\frac{\rho A}{EI_z}V=0. \tag{5.6}$$

Ecuația (5.6) este de ordinul patru deci soluția generală (exceptând mişcările de corp rigid) are forma

$$V(x)=B_1\sin\alpha x+B_2\cos\alpha x+B_3\,\mathrm{sh}\,\alpha x+B_4\,\mathrm{ch}\,\alpha x \tag{5.7}$$

unde

$$\alpha^4=\omega^2\frac{\rho A}{EI_z}. \tag{5.8}$$

Cele patru constante de integrare se determină din condițiile la limită. Cele trei condiții de rezemare clasice includ: a) capătul simplu rezemat sau articulat, pentru care deplasarea transversală şi momentul încovoietor sunt zero; b) capătul încastrat sau fixat, pentru care deplasarea transversală şi rotirea (panta liniei elastice) sunt zero; c) capătul liber, pentru care momentul încovoietor şi forța tăietoare sunt zero. Pentru o bară de secțiune constantă, aceste condiții se exprimă în funcție de $V(x)$ după cum urmează:

a) La un capăt simplu rezemat:

$$V=0 \quad \text{şi} \quad \mathrm{d}^2V/\mathrm{d}x^2=0. \tag{5.9}$$

b) La un capăt încastrat:

$$V=0 \quad \text{şi} \quad \mathrm{d}V/\mathrm{d}x=0. \tag{5.10}$$

c) La un capăt liber:

$$\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}x^2=0 \quad \text{şi} \quad \mathrm{d}^3V/\mathrm{d}x^3=0. \tag{5.11}$$

Impunând câte două condiții la fiecare capăt se obține un sistem de patru ecuații omogene. Soluția nebanală se obține anulând determinantul coeficienților. Dezvoltarea determinantului conduce la o ecuație transcendentă în $\alpha\ell$ ale cărei soluții înlocuite în (5.8) conduc la expresia pulsațiilor proprii

$$\omega_n=(\alpha_n\ell)^2\sqrt{\frac{EI_z}{\rho A\ell^4}}. \qquad n=1,\,2,\,3,\ldots \tag{5.12}$$

şi înlocuite în (5.7) conduc la funcțiile care definesc formele proprii de vibrație.

Deoarece ecuația (5.6) este omogenă, fiecare funcție modală $V_n(x)$ poate descrie doar deplasări relative ale diferitelor secțiuni ale barei, şi nu deplasări absolute. La fel ca la sistemele discrete, procesul de atribuire a unor valori absolute funcției $V_n(x)$ se numeşte *normalizare*, şi constă din înmulțirea cu o anumită constantă. Alegerea acestei constante este arbitrară. Astfel, se poate atribui o valoare egală cu 1 deplasării dintr-o anumită secțiune. Pentru reprezentarea grafică a formei mai multor moduri proprii, se dă o valoare egală cu 1 deplasării relative maxime din fiecare mod de vibrație. O altă metodă constă din normalizarea formelor modale astfel încât să aibă o masă modală egală cu 1.

În continuare, se vor determina pulsațiile proprii şi formele proprii de vibrație pentru câteva cazuri particulare de rezemare.

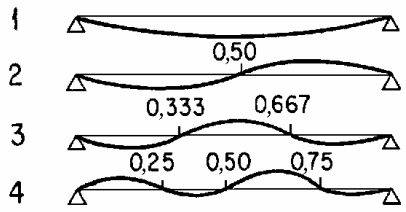


Fig. 5.2

5.1.2.1 Ambele capete simplu rezemate

La o bară simplu rezemată la capete (fig. 5.2), condițiile la limită sunt $V = 0$ şi $\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}x^2 = 0$ la $x = 0$ şi la $x = \ell$. Înlocuind condițiile la $x = 0$ în expresia (5.7) rezultă

$$0 = B_2 + B_4 \text{ şi } 0 = -B_2 + B_4 .$$

Astfel $B_2 = B_4 = 0$.

Aplicând condițiile la $x = \ell$, rezultă

$$0 = B_1 \sin \alpha\ell + B_3 \operatorname{sh} \alpha\ell \quad \text{şi} \quad 0 = -B_1 \sin \alpha\ell + B_3 \operatorname{sh} \alpha\ell .$$

Singura soluție nebanală este $B_3 = 0$ şi $\sin \alpha\ell = 0$, deci

$$\alpha\ell = n\pi , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (5.13)$$

Primele patru rădăcini ale ecuației (5.13) sunt

$$\alpha_n\ell = 3{,}142;\ \ 6{,}283;\ \ 9{,}425;\ \ 12{,}566 . \qquad n = 1, 2, 3, 4 .$$

Pentru o bară cu secțiune constantă, simplu rezemată la capete, pulsațiile proprii sunt

$$\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4 \frac{EI_z}{\rho A}. \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ldots \tag{5.14}$$

iar formele proprii sunt date de

$$V_n(x) = C\ \sin\frac{n\pi x}{\ell}\ ,$$

unde C este o constantă arbitrară.

Formele primelor patru moduri de vibrație, pentru $n = 1$, 2, 3, 4, şi pozițiile punctelor nodale corespunzătoare sunt prezentate în fig. 5.2.

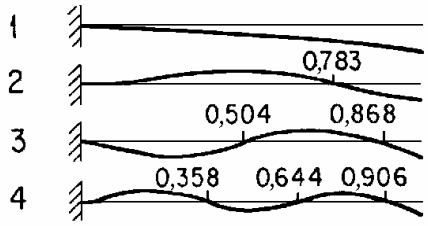


Fig. 5.3

5.1.2.2 Bara în consolă

Alegând originea axei x în încastrare, şi aplicând condițiile la limită (5.10) şi (5.11), rezultă:

La $x = 0$, $V = 0$, $\qquad 0 = B_2 + B_4$.

La $x = 0$, $\mathrm{d}V/\mathrm{d}x = 0$. $\qquad 0 = B_1 + B_3$.

La $x = \ell$, $\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}x^2 = 0$.

$$0 = -B_1 \sin\alpha\ell - B_2 \cos\alpha\ell + B_3\ \mathrm{sh}\,\alpha\ell + B_4\ \mathrm{ch}\,\alpha\ell\ .$$

La $x = \ell$, $\mathrm{d}^3V/\mathrm{d}x^3 = 0$.

$$0 = -B_1 \cos\alpha\ell + B_2 \sin\alpha\ell + B_3\ \mathrm{ch}\,\alpha\ell + B_4\ \mathrm{sh}\,\alpha\ell\ .$$

Cele patru ecuații liniare omogene de mai sus au o soluție nebanală dacă se anulează determinantul coeficienților

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha\ell & -\cos\alpha\ell & \operatorname{sh}\alpha\ell & \operatorname{ch}\alpha\ell \\ -\cos\alpha\ell & \sin\alpha\ell & \operatorname{ch}\alpha\ell & \operatorname{sh}\alpha\ell \end{vmatrix} = 0$$

de unde rezultă ecuația pulsațiilor proprii

$$\cos\alpha\ell \cdot \operatorname{ch}\alpha\ell = -1 . \tag{5.15}$$

Primele cinci soluții ale ecuației (5.15) sunt

$$\alpha_n\ell = 1{,}875;\ \ 4{,}694;\ \ 7{,}855;\ \ 10{,}996;\ \ 14{,}137 . \quad n = 1, 2, 3, 4, 5 . \tag{5.16}$$

Pentru $n > 5$ valorile soluțiilor pot fi aproximate prin

$$\alpha_n\ell = \frac{2n-1}{2}\,\pi . \tag{5.16, a}$$

Înlocuind $B_4 = -B_2$ şi $B_3 = -B_1$ în ultimele două condiții la limită, rezultă

$$B_1\left(\sin\alpha\ell + \operatorname{sh}\alpha\ell\right) + B_2\left(\cos\alpha\ell + \operatorname{ch}\alpha\ell\right) = 0,$$
$$B_1\left(\cos\alpha\ell + \operatorname{ch}\alpha\ell\right) - B_2\left(\sin\alpha\ell - \operatorname{sh}\alpha\ell\right) = 0.$$

Egalând cu zero determinantul coeficienților ecuațiilor de mai sus se obține ecuația pulsațiilor proprii (5.15). Exprimând B_4, B_3 şi B_2 în funcție de $B_1 = C$, se obține funcția care descrie forma modului de ordinul *n*

$$V_n(x) = C\left[\operatorname{ch}\alpha x - \cos\alpha x - k_n\left(\operatorname{sh}\alpha x - \sin\alpha x\right)\right] \tag{5.17}$$

unde

$$k_n = \frac{\operatorname{ch}\alpha\ell + \cos\alpha\ell}{\operatorname{sh}\alpha\ell + \sin\alpha\ell}, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ldots \tag{5.18}$$

Formele primelor patru moduri proprii de vibrație şi pozițiile punctelor nodale respective sunt prezentate în fig. 5.3.

5.1.2.3 Bara liberă la capete

La o bară liberă la capete (fig. 5.4), condițiile la limită sunt

$$V''(0) = 0\ ,\ V'''(0) = 0\ ,\ V''(\ell) = 0\ ,\ V'''(\ell) = 0 . \tag{5.19}$$

Cu metoda utilizată în exemplele precedente şi aplicând condițiile la limită (5.19) se obține ecuația pulsațiilor proprii

$$\cos\alpha\ell\cdot\operatorname{ch}\alpha\ell=+1\,. \tag{5.20}$$

Primele patru rădăcini ale ecuației (5.20) sunt

$$\alpha_n\ell=4{,}730;\ \ 7{,}853;\ \ 10{,}996;\ \ 14{,}137\,.\quad n=1,\,2,\,3,\,4 \tag{5.21, *a*}$$

Pentru $n>4$ valorile soluțiilor pot fi aproximate prin

$$\alpha_n\ell=\frac{2n-1}{2}\,\pi\,. \tag{5.21, *b*}$$

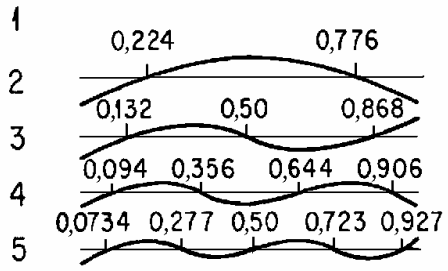


Fig. 5.4

Formele proprii sunt date de

$$V_n(x)=C\left[\operatorname{sh}\alpha x+\sin\alpha x-k_n\left(\operatorname{ch}\alpha x+\cos\alpha x\right)\right] \tag{5.22}$$

unde

$$k_n=\frac{\operatorname{sh}\alpha\ell-\sin\alpha\ell}{\operatorname{ch}\alpha\ell-\cos\alpha\ell},\qquad n=1,\,2,\,3,\ldots$$

Formele primelor patru moduri proprii de vibrație şi pozițiile punctelor nodale respective sunt prezentate în fig. 5.4.

Ecuația (5.6) admite alte două soluții care satisfac condițiile la limită (5.19), anume

$$V(x)=B_5=const.,\quad V(x)=B_6x+B_7.$$

Acestea definesc modurile de vibrație “de corp rigid”. Prima corespunde translației verticale, a doua – rotației în plan vertical, ambele având pulsația proprie nulă.

5.1.2.4 Bara încastrată la capete

La o bară încastrată la ambele capete (fig. 5.5), condițiile la limită sunt

$$V(0)=0\,,\ V'(0)=0\,,\ V(\ell)=0\,,\ V'(\ell)=0\,.$$

Ecuația pulsațiilor proprii este (5.19) iar pulsațiile proprii sunt date de $\alpha_n \ell = 4{,}730;\ 7{,}853;\ 10{,}996;\ 14{,}137$, pentru $n = 1, 2, 3, 4$, şi $\alpha_n \ell = \dfrac{2n-1}{2}\pi$ pentru $n > 4$.

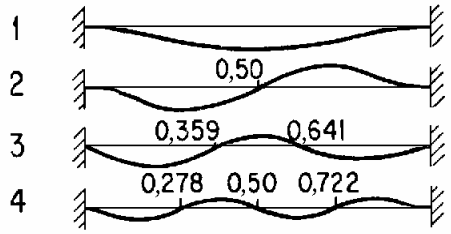


Fig. 5.5

Formele modurilor proprii sunt date de

$$V_n(x) = C\left[\operatorname{ch}\alpha x - \cos\alpha x - k_n\left(\operatorname{sh}\alpha x - \sin\alpha x\right)\right] \qquad (5.23)$$

unde

$$k_n = \frac{\operatorname{ch}\alpha\ell - \cos\alpha\ell}{\operatorname{sh}\alpha\ell - \sin\alpha\ell}, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ldots \qquad (5.24)$$

Formele primelor patru moduri proprii de vibrație şi pozițiile punctelor nodale corespunzătoare sunt prezentate în fig. 5.5.

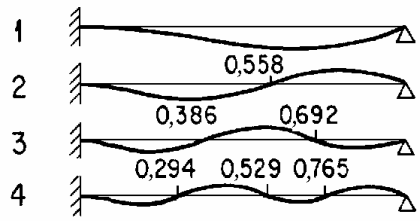


Fig. 5.6

5.1.2.5 Un capăt încastrat şi un capăt liber

Când bara este încastrată la un capăt şi liberă la celălalt (fig. 5.6), condițiile la limită sunt

$$V(0) = 0,\ V'(0) = 0,\ V(\ell) = 0,\ V''(\ell) = 0.$$

Ecuația pulsațiilor proprii este

$$\text{th}\,\alpha\ell = \text{tg}\,\alpha\ell\,. \tag{5.25}$$

Primele patru rădăcini ale ecuației (5.25) sunt

$$\alpha_n\ell = 3{,}927;\;\; 7{,}069;\;\; 10{,}210;\;\; 13{,}352\,. \qquad n = 1,\,2,\,3,\,4\,.$$

Pentru $n > 4$ valorile soluțiilor pot fi aproximate prin

$$\alpha_n\ell = \frac{4n+1}{4}\,\pi\,. \tag{5.26}$$

Formele modurilor proprii sunt date de

$$V_n(x) = C\left[\text{ch}\,\alpha x - \cos\alpha x - k_n\left(\text{sh}\,\alpha x - \sin\alpha x\right)\right] \tag{5.27}$$

unde

$$k_n = \frac{\text{ch}\,\alpha\ell - \cos\alpha\ell}{\text{sh}\,\alpha\ell - \sin\alpha\ell}, \qquad n = 1,\,2,\,3,\ldots \tag{5.28}$$

Formele primelor patru moduri proprii de vibrație şi pozițiile punctelor nodale corespunzătoare sunt prezentate în fig. 5.6.

5.1.3 Ortogonalitatea funcțiilor proprii

Ca la toate sistemele vibratoare neamortizate, funcțiile proprii ale barelor cu masă şi elasticitate distribuite sunt ortogonale. În cazul general al barelor cu secțiune variabilă, acestea sunt ortogonale în raport cu o funcție de ponderare $m(x)$, unde $m(x) = \rho A(x)$ este masa pe unitatea de lungime. Modulul de rigiditate la încovoiere se notează $EI(x)$.

Considerând modurile de indice *r* şi *s*, se poate scrie

$$\left(EIV_r''\right)'' - \omega_r^2\, mV_r = 0\,, \tag{5.29}$$

$$\left(EIV_s''\right)'' - \omega_s^2\, mV_s = 0\,. \tag{5.30}$$

Înmulțind ecuațiile (5.29) şi (5.30) cu V_s şi respectiv V_r, şi integrând de la 0 la ℓ rezultă

$$\int_0^\ell \left(EIV_r''\right)'' V_s\,\text{d}x = \omega_r^2 \int_0^\ell V_r V_s\, m\,\text{d}x\,, \tag{5.31}$$

$$\int_0^\ell \left(EIV_s''\right)'' V_r\,\text{d}x = \omega_s^2 \int_0^\ell V_s V_r\, m\,\text{d}x\,. \tag{5.32}$$

Scăzând ecuația (5.32) din (5.31) rezultă

$$\left(\omega_r^2-\omega_s^2\right)\int_0^\ell V_s V_r\, m\,\mathrm{d}x=\int_0^\ell\left[\left(EIV_r''\right)''V_s-\left(EIV_s''\right)''V_r\right]\mathrm{d}x\,. \qquad (5.33)$$

Integrând prin părți membrul drept al ecuației (5.33) se obține

$$\left(\omega_r^2-\omega_s^2\right)\int_0^\ell V_s V_r\, m\,\mathrm{d}x=\left\{\left[V_s\left(EIV_r''\right)'-V_r\left(EIV_s''\right)'\right]-EI\left(V_s'V_r''-V_r'V_s''\right)\right\}_0^\ell. \qquad (5.34)$$

Membrul drept al ecuației (5.34) se anulează dacă, la capetele barei, se aplică cel puțin una dintre următoarele perechi de condiții la limită:

$$\begin{aligned} V&=0\ , & V'&=0,\\ V&=0\ , & EIV''&=0,\\ V'&=0\ , & \left(EIV''\right)'&=0,\\ EIV''&=0\ , & \left(EIV''\right)'&=0. \end{aligned} \qquad (5.35)$$

Presupunând că una dintre perechile de condiții la limită de mai sus se aplică la fiecare din capete barei, ecuația (5.34) se reduce la

$$\int_0^\ell m(x)V_r(x)V_s(x)\mathrm{d}x=0\,, \qquad r\neq s\,. \qquad (5.36)$$

Ecuațiile de tipul (5.36) se numesc *relații de ortogonalitate* între funcțiile proprii ale barei. Se spune că funcțiile $V_r(x)$ şi $V_s(x)$ sunt ortogonale (între ele) în raport cu funcția de ponderare $m(x)$.

La o bară de secțiune constantă, relația (5.36) devine

$$\int_0^\ell V_r(x)\,V_s(x)\mathrm{d}x=0\,, \qquad r\neq s\,. \qquad (5.36,\,a)$$

De asemenea, la o bară cu o combinație oarecare între condițiile la limită de mai sus (simplu rezemată, încastrată sau liberă)

$$\int_0^\ell EI(x)V_r''(x)\,V_s''(x)\mathrm{d}x=0\,, \qquad r\neq s\,.$$

Relațiile (5.36) pot fi utilizate la determinarea răspunsului liber cu condiții inițiale date.

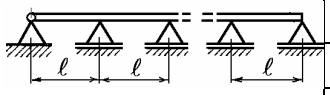
5.1.4 Grinzi continue

La calculul pulsațiilor proprii ale barelor pe mai multe reazeme, tronsonul dintre două reazeme este considerat ca o bară separată, cu originea în reazemul din stânga. Ecuația (5.7) se aplică fiecărui tronson.

La capetele barei, sunt aplicabile condițiile la limită corespunzătoare tipului de rezemare. Pe fiecare reazem intermediar săgeata este nulă. Deoarece bara este continuă, pantele şi momentele încovoietoare la stânga şi la dreapta reazemelor intermediare sunt egale. Saltul forței tăietoare este egal cu reacțiunea din reazem.

În Tabelul 5.1 se dau valorile lui $\alpha_n \ell$ din relația (5.12) pentru calculul primelor cinci pulsații proprii ale grinzilor continue de secțiune constantă şi cu deschideri egale.

Tabelul 5.1

Configurația barei	Număr de deschideri	Modul				
		1	2	3	4	5
		Rădăcinile ecuație caracteristice				
	1	3,142	6,283	9,425	12,566	15,708
	2	3,142	3,927	6,283	7,069	9,425
	3	3,142	3,550	4,304	6,283	6,692
	4	3,142	3,393	3,927	4,461	6,283
	5	3,142	3,299	3,707	4,147	4,555
	6	3,142	3,267	3,550	3,927	4,304
	7	3,142	3,236	3,456	3,770	4,084
	8	3,142	3,205	3,393	3,644	3,927
	9	3,142	3,205	3,330	3,550	3,801
	10	3,142	3,205	3,299	3,487	3,707
	11	3,142	3,173	3,267	3,424	3,613
	12	3,142	3,173	3,267	3,393	3,550

Pulsațiile proprii ale grinzilor continue cu deschideri egale formează grupuri cu valori apropiate între ele, numărul pulsațiilor dintr-un grup fiind egal cu numărul deschiderilor barei. Aceasta este o proprietate a aşa-numitelor "sisteme periodice". În fig. 5.7 se prezintă formele modurilor proprii de vibrație pentru primul grup de pulsații proprii plus prima pulsație proprie din grupul următor la grinzi continue cu două, trei, patru şi respectiv cinci deschideri egale.

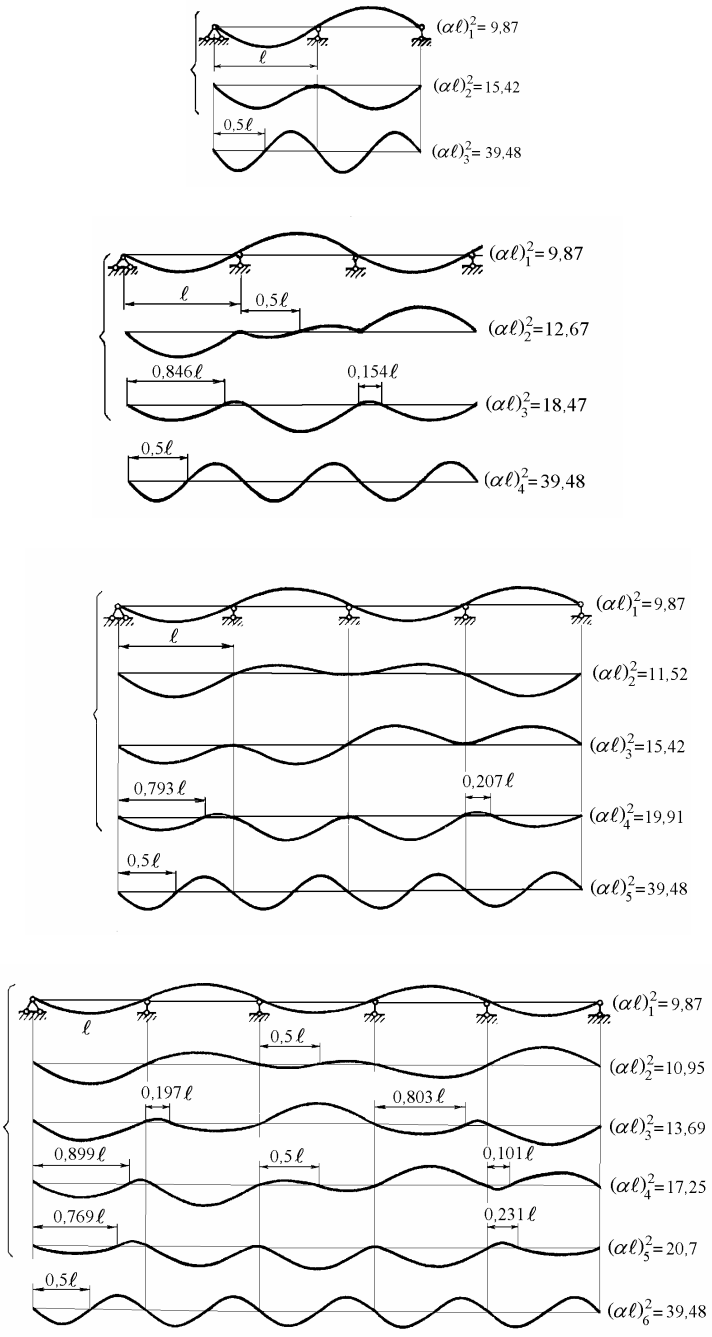

$(\alpha\ell)_1^2$= 9,87
ℓ
$(\alpha\ell)_2^2$=15,42
0,5ℓ
$(\alpha\ell)_3^2$= 39,48
$(\alpha\ell)_1^2$= 9,87
ℓ
0,5ℓ
$(\alpha\ell)_2^2$=12,67
0,846ℓ
0,154ℓ
$(\alpha\ell)_3^2$=18,47
0,5ℓ
$(\alpha\ell)_4^2$=39,48
$(\alpha\ell)_1^2$=9,87
ℓ
$(\alpha\ell)_2^2$=11,52
$(\alpha\ell)_3^2$=15,42
0,793 ℓ
0,207 ℓ
$(\alpha\ell)_4^2$=19,91
0,5ℓ
$(\alpha\ell)_5^2$=39,48
$(\alpha\ell)_1^2$=9,87
ℓ
0,5 ℓ
$(\alpha\ell)_2^2$=10,95
0,197 ℓ
0,803 ℓ
$(\alpha\ell)_3^2$=13,69
0,899 ℓ
0,5 ℓ
0,101 ℓ
$(\alpha\ell)_4^2$=17,25
0,769 ℓ
0,231 ℓ
$(\alpha\ell)_5^2$=20,7
0,5ℓ
$(\alpha\ell)_6^2$=39,48

Fig. 5.7

Exemplul 5.1

Să se stabilească ecuația pulsațiilor proprii la o bară cu două deschideri inegale, simplu rezemată la capete.

Rezolvare. Pentru primul tronson, de lungime ℓ_1, soluția (5.7)se scrie

$$V_1(x_1) = A_1 \sin \alpha x_1 + B_1 \cos \alpha x_1 + C_1 \operatorname{sh} \alpha x_1 + D_1 \operatorname{ch} \alpha x_1$$

iar pentru al doilea tronson, de lungime ℓ_2, are forma

$$V_2(x_2) = A_2 \sin \alpha x_2 + B_2 \cos \alpha x_2 + C_2 \operatorname{sh} \alpha x_2 + D_2 \operatorname{ch} \alpha x_2 .$$

Pe baza condițiilor la limită şi de continuitate

$$V_1(0) = V_1''(0) = 0 , \quad V_1(\ell_1) = V_2(0) = 0 , \quad V_1'(\ell_1) = V_2'(0),$$
$$V_1''(\ell_1) = V_2''(0), \quad V_2(\ell_2) = V_2''(\ell_2) = 0$$

se stabilesc următoarele cinci relații între constantele de integrare

$$\begin{aligned}
&A_1 \sin \alpha \ell_1 + C_1 \operatorname{sh} \alpha \ell_1 = 0, \\
&A_1 \cos \alpha \ell_1 + C_1 \operatorname{ch} \alpha \ell_1 - A_2 - C_2 = 0, \\
-&A_1 \sin \alpha \ell_1 + C_1 \operatorname{sh} \alpha \ell_1 - 2D_2 = 0, \\
&A_2 \sin \alpha \ell_2 + C_2 \operatorname{sh} \alpha \ell_2 + D_2 (\operatorname{ch} \alpha \ell_2 - \cos \alpha \ell_2) = 0, \\
-&A_2 \sin \alpha \ell_2 + C_2 \operatorname{ch} \alpha \ell_2 + D_2 (\operatorname{ch} \alpha \ell_2 + \cos \alpha \ell_2) = 0.
\end{aligned}$$

Sistemul de ecuații de mai sus are soluții nebanale dacă determinantul coeficienților necunoscutelor A_1, C_1, A_2, C_2 şi D_2 este egal cu zero. Din această condiție se obține ecuația pulsațiilor proprii

$$\operatorname{sh} \mu\alpha\ell \cdot \operatorname{sh}(1-\mu)\alpha\ell \cdot \sin \alpha\ell - \sin \mu\alpha\ell \cdot \sin(1-\mu)\alpha\ell \cdot \operatorname{sh} \alpha\ell = 0 ,$$

în care s-a notat $\mu = \ell_1 / \ell$ şi $\ell = \ell_1 + \ell_2$.

5.1.5 Condiții la limită naturale

Efectul forțelor şi momentelor concentrate, al reazemelor elastice şi al maselor concentrate poate fi introdus prin condițiile la limită *naturale* bazate pe ecuațiile (5.1) şi (5.2), care definesc momentul încovoietor şi forța tăietoare în secțiunea respectivă. După caz, acestea sunt utilizate împreună cu condițiile la limită *geometrice*, care definesc deplasarea laterală (săgeata) şi panta liniei elastice (rotirea secțiunii).

5.1.5.1 Forțe şi momente concentrate

Condițiile la limită naturale se stabilesc cel mai uşor pe baza *condițiilor de continuitate* care definesc saltul momentului încovoietor şi al forței tăietoare în secțiunile unde sunt aplicate un moment concentrat sau o forță concentrată.

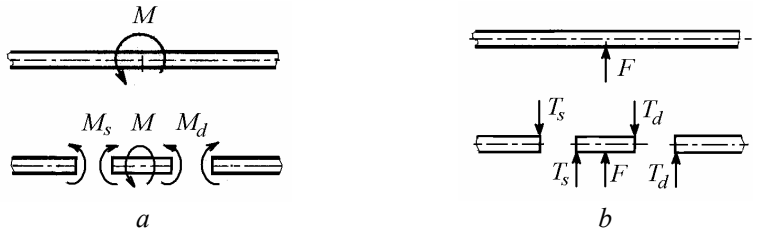


Fig. 5.8

Din fig. 5.8, *a* rezultă relația între momentele încovoietoare la dreapta M_d şi la stânga M_s secțiunii în care se aplică momentul *M*

$$M_d = M_s - M\,. \tag{5.37}$$

Din fig. 5.8, *b* rezultă relația între forțele tăietoare la dreapta T_d şi la stânga T_s secțiunii în care se aplică forța *F*

$$T_d = T_s + F\,. \tag{5.38}$$

Dacă relațiile (5.37) şi (5.38) se aplică la capătul din stânga al unei bare, atunci $M_s = 0$ şi $T_s = 0$, iar dacă se aplică la capătul din dreapta, atunci $M_d = 0$ şi $T_d = 0$.

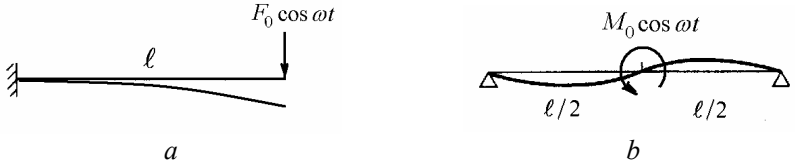


Fig. 5.9

Astfel, la bara din fig. 5.9, *a*, la capătul din dreapta $M = 0$ şi $F = -F_0 \cos \omega t$, deci condițiile la limită se scriu

$$\begin{aligned} &EIv''(\ell) = M(\ell) = 0, \\ &EIv'''(\ell) = T(\ell) = -F = F_0 \cos \omega t, \qquad v'''(\ell) = \frac{F_0}{EI} \cos \omega t. \end{aligned} \tag{5.39}$$

La bara din fig. 5.9, *b*, la mijlocul barei, condițiile la limită sunt

$$v'\left(\frac{\ell}{2}\right)=0,$$
$$EIv''\left(\frac{\ell}{2}\right)=M\left(\frac{\ell}{2}\right)=-\frac{M}{2}=-\frac{M_0}{2}\cos\omega t,\qquad v''\left(\frac{\ell}{2}\right)=-\frac{M_0}{2EI}\cos\omega t. \tag{5.40}$$

5.1.5.2 Reazeme elastice

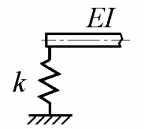
În reazemele elastice liniare, reacțiunile sunt proporționale cu deplasările corespunzătoare. La un arc de translație de rigiditate *k*, forța este proporțională cu săgeata, $F=-kv$. La un arc de rotație de rigiditate *K*, momentul este proporțional cu rotirea, $M=-Kv'$.

Condițiile de continuitate (5.37) şi (5.38) se scriu

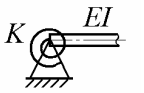
$$EIv_d'''=EIv_s'''-kv, \tag{5.41}$$

$$EIv_d''=EIv_s''+Kv'. \tag{5.42}$$

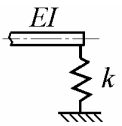
Acestea se particularizează la capetele barei prin anularea termenului respectiv. Pentru capătul din stânga condițiile la limită sunt date în fig. 5.10, *a* iar pentru capătul din dreapta – în fig. 5.10, *b*.



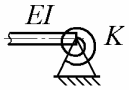
$EIv'''(0)=-kv(0)$



$EIv''(0)=Kv'(0)$



$EIv'''(\ell)=kv(\ell)$



$EIv''(\ell)=-Kv'(\ell)$

a *b*

Fig. 5.10

5.1.5.3 Mase concentrate

Pentru o greutate ataşată barei, de masă *m* şi moment de inerție masic *J*, condițiile de continuitate (5.37) şi (5.38) se scriu

$$EIv_d'''=EIv_s'''-m\ddot{v}, \tag{5.43}$$

$$EIv_d''=EIv_s''+J\ddot{v}'. \tag{5.44}$$

Exprimând accelerațiile în funcție de deplasări, rezultă

$$EIv_d''' = EIv_s''' + m\omega^2 v\,, \tag{5.43,a}$$

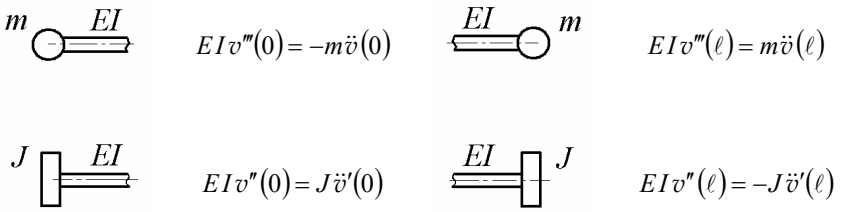
$$EIv_d'' = EIv_s'' - J\omega^2 v'\,. \tag{5.44,a}$$

Înlocuind ω^2 din relația (5.8), se obține

$$\frac{1}{\alpha^3}v_d''' = \frac{1}{\alpha^3}v_s''' + (\alpha\ell)\frac{m}{\rho A\ell}\,v\,, \tag{5.43,b}$$

$$\frac{1}{\alpha^2}v_d'' = \frac{1}{\alpha^2}v_s'' - (\alpha\ell)^3\frac{J}{\rho A\ell^3}\frac{1}{\alpha}v'\,. \tag{5.44,b}$$

Relațiile de continuitate se particularizează la capetele barei prin anularea termenului respectiv. Pentru capătul din stânga condițiile la limită sunt date în fig. 5.11, *a* iar pentru capătul din dreapta – în fig. 5.11, *b*.



a *b*

Fig. 5.11

Exemplul 5.2

O bară prismatică cu lungimea ℓ şi modulul de rigiditate la încovoiere EI este articulată la un capăt şi simplu rezemată pe un arc de rigiditate k – la celălalt capăt (fig. 5.12). Să se determine ecuația pulsațiilor proprii ale vibrațiilor transversale ale barei şi primele două pulsații proprii pentru cazul când $\frac{k\ell^3}{EI} = 1$.

Rezolvare. Se utilizează soluția ecuației de mişcare (5.7). La $x = 0$, săgeata şi momentul încovoietor sunt nule, $V(0) = 0$ şi $V''(0) = 0$. Rezultă $B_2 = B_4 = 0$.

La $x = \ell$, momentul încovoietor este zero iar forța tăietoare este forța din arc, proporțională cu săgeata, $V''(\ell) = 0$ şi $V'''(\ell) = \frac{k}{EI}V(\ell)$. Rezultă un sistem

algebric omogen cu necunoscutele B_1 şi B_3. Anulând determinantul coeficienţilor se obţine ecuaţia pulsaţiilor proprii

$$\frac{\sin\alpha\ell\,\mathrm{ch}\alpha\ell-\cos\alpha\ell\,\mathrm{sh}\alpha\ell}{2\sin\alpha\ell\,\mathrm{sh}\alpha\ell}(\alpha\ell)^3=\frac{k\ell^3}{EI}. \qquad (5.45)$$

Pentru $\frac{k\ell^3}{EI}=1$, rezultă $(\alpha\ell)_1=1{,}310$ şi $(\alpha\ell)_2=3{,}943$, deci primele două pulsaţii proprii sunt

$$\omega_1=\frac{1{,}716}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}},\qquad \omega_2=\frac{15{,}547}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}.$$

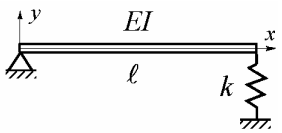


Fig. 5.12

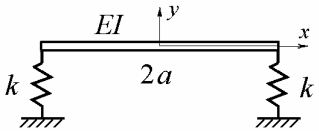


Fig. 5.13

Exemplul 5.3

Să se determine ecuaţia pulsaţiilor proprii ale vibraţiilor transversale ale unei bare cu lungimea $2a$ şi modulul de rigiditate la încovoiere EI, rezemată la capete pe arcuri de rigiditate *k* (fig. 5.13).

Rezolvare. Se utilizează soluţia ecuaţiei de mişcare (5.7). Cu originea axelor de coordonate la mijlocul barei, condiţiile la limită se aplică pentru jumătatea din dreapta a barei.

Pentru modurile simetrice de vibraţie, la $x=0$, panta şi forţa tăietoare sunt nule, $V'(0)=0$ şi $V'''(0)=0$. Rezultă $B_1=B_3=0$.

La $x=a$, momentul încovoietor este zero iar forţa tăietoare este forţa din arc, proporţională cu săgeata, $V''(a)=0$ şi $V'''(a)=\frac{k}{EI}V(a)$. Rezultă

$$-B_2\cos\alpha a+B_4\,\mathrm{ch}\alpha a=0,$$

$$\alpha^3\left(B_2\sin\alpha a+B_4\,\mathrm{sh}\alpha a\right)=\frac{k}{EI}\left(B_2\cos\alpha a+B_4\,\mathrm{ch}\alpha a\right).$$

Anulând determinantul coeficienţilor lui B_2 şi B_4 se obţine ecuaţia pulsaţiilor proprii ale modurilor simetrice de vibraţie

$$\frac{\sin\alpha a\,\mathrm{ch}\alpha a+\cos\alpha a\,\mathrm{sh}\alpha a}{2\cos\alpha a\,\mathrm{ch}\alpha a}(\alpha a)^3=\frac{ka^3}{EI}. \qquad (5.46)$$

Aceasta corespunde barei încastrate în capătul din stânga şi rezemate elastic în capătul din dreapta.

Pentru $k=0$, din (5.46) rezultă ecuația pulsațiilor proprii pentru modurile simetrice ale barei libere la capete

$$\mathrm{tg}\,\alpha a+\mathrm{th}\,\alpha a=0.$$

Pentru $k\to\infty$, din (5.46) se obține ecuația pulsațiilor proprii pentru modurile simetrice ale barei simplu rezemate la capete

$$\cos\alpha a=0.$$

Pentru modurile antisimetrice de vibrație, la $x=0$, săgeata şi momentul încovoietor sunt nule, $V(0)=0$ şi $V''(0)=0$, ca la problema precedentă. Deci ecuația pulsațiilor proprii pentru modurile antisimetrice se obține din (5.45) înlocuind $\ell=a$.

Pentru $k=0$, rezultă $\mathrm{tg}\,\alpha a-\mathrm{th}\,\alpha a=0$, iar pentru $k\to\infty$, se obține $\sin\alpha a=0$.

Exemplul 5.4

O bară în consolă, cu lungimea ℓ, modulul de rigiditate la încovoiere EI şi masa pe unitatea de lungime ρA, are ataşată în capătul liber o greutate de masă m şi moment de inerție masic J (fig. 5.14). Să se determine ecuația pulsațiilor proprii ale vibrațiilor transversale ale barei.

Rezolvare. Se utilizează soluția ecuației de mişcare (5.7). În încastrare, la $x=0$, săgeata şi rotirea sunt nule, $V(0)=0$ şi $V'(0)=0$. Rezultă $B_4=-B_2$ şi $B_3=-B_1$.

La $x=\ell$, condițiile la limită se scriu

$$\frac{1}{\alpha^3}V'''(\ell)=-\mu\,(\alpha\ell)V(\ell),$$

$$\frac{1}{\alpha^2}V''(\ell)=\beta\,(\alpha\ell)^3\frac{1}{\alpha}V'(\ell),$$

unde s-a notat

$$\mu=\frac{m}{\rho A\ell},\qquad \beta=\frac{J}{\rho A\ell^3}.$$

Rezultă un sistem algebric omogen cu variabilele B_1 şi B_2. Anulând determinantul coeficienților se obține ecuația pulsațiilor proprii

$$1-\mu\beta(\alpha\ell)^4+\frac{1+\mu\beta(\alpha\ell)^4}{\cos\alpha\ell\,\mathrm{ch}\alpha\ell}-\mu(\alpha\ell)(\mathrm{tg}\alpha\ell-\mathrm{th}\alpha\ell)-\beta(\alpha\ell)^3(\mathrm{tg}\alpha\ell-\mathrm{th}\alpha\ell)=0\,.$$

Prin particularizare, înlocuind $\beta=0$, se obține ecuația pentru bara cu o masă concentrată, cu moment de inerție neglijabil

$$\frac{1+\cos\alpha\ell\,\mathrm{ch}\alpha\ell}{\sin\alpha\ell\,\mathrm{ch}\alpha\ell-\cos\alpha\ell\,\mathrm{sh}\alpha\ell}\,\frac{1}{\alpha\ell}=\mu\,. \qquad (5.47)$$

Pentru $\beta=0$ şi $\mu=0$ rezultă ecuația pulsațiilor proprii ale barei fără masă în capăt (5.15).

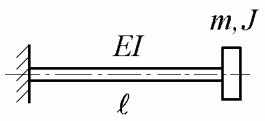


Fig. 5.14

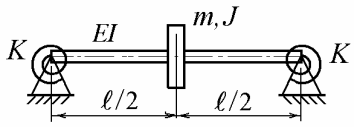


Fig. 5.15

Exemplul 5.5

O bară cu lungimea ℓ, modulul de rigiditate la încovoiere EI şi masa pe unitatea de lungime ρA, este rezemată la capete pe arcuri torsionale de rigiditate K şi are atașată la mijloc o greutate de masă m şi moment de inerție masic J (fig. 5.15). Să se determine ecuațiile pulsațiilor proprii ale vibrațiilor transversale simetrice şi antisimetrice ale barei.

Rezolvare. Ecuația pulsațiilor proprii ale modurilor simetrice de vibrație este

$$\frac{m}{\rho A\ell}\frac{\alpha\ell}{2}\left(\mathrm{th}\frac{\alpha\ell}{2}-\mathrm{tg}\frac{\alpha\ell}{2}\right)+\frac{K\ell}{2EI}\left[\frac{m}{\rho A\ell}\left(1-\sec\frac{\alpha\ell}{2}\,\mathrm{sech}\frac{\alpha\ell}{2}\right)+\frac{2}{\alpha\ell}\left(\mathrm{th}\frac{\alpha\ell}{2}+\mathrm{tg}\frac{\alpha\ell}{2}\right)\right]=-2\,.$$

Ecuația pulsațiilor proprii ale modurilor antisimetrice de vibrație este

$$\sin\frac{\alpha\ell}{2}\,\mathrm{sh}\frac{\alpha\ell}{2}\left\{2+\left[\left(\frac{\alpha\ell}{2}\right)^3\frac{4J}{\rho A\ell^3}-\frac{K\ell}{2EI}\left(\frac{2}{\alpha\ell}\right)\right]\left(\mathrm{cotg}\frac{\alpha\ell}{2}-\mathrm{coth}\frac{\alpha\ell}{2}\right)\right\}+$$

$$+\frac{K\ell}{2EI}\frac{4J}{\rho A\ell^3}\left(\frac{\alpha\ell}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\alpha\ell}{2}\,\mathrm{ch}\frac{\alpha\ell}{2}-1\right)=0\,.$$

5.1.6 Răspunsul la excitație armonică

La o bară solicitată de o forță sau un cuplu cu variație armonică în timp, răspunsul dinamic poate fi calculat utilizând soluția pentru bara fără sarcină exterioară distribuită, introducând excitația printr-o condiție la limită.

Pentru exemplificare se consideră o bară liberă la capete.

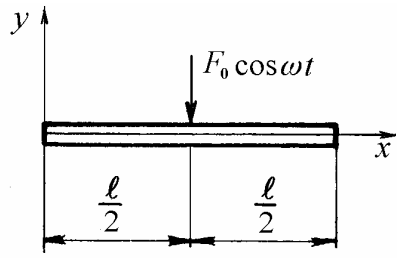


Fig. 5.16

Încărcare simetrică

Se consideră o bară liberă la capete, acționată de o forță armonică $F_0 \sin \omega t$ aplicată la mijlocul barei (fig. 5.16).

În regim staționar, soluția se alege de forma

$$v(x, t) = Y(x) \cos \omega t , \tag{5.48}$$

în care ω este pulsația excitatoare. Din relația (5.4) rezultă

$$Y(x) = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 \operatorname{sh} \alpha x + C_4 \operatorname{ch} \alpha x \tag{5.49}$$

unde

$$\alpha^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{E I_z} . \tag{5.50}$$

Pentru jumătatea din stânga a barei, condițiile la limită sunt

$$Y''(0) = 0 , \quad Y'''(0) = 0 , \quad Y'(\ell/2) = 0 , \quad E I Y'''(\ell/2) = F_0/2 . \tag{5.51}$$

Amplitudinea vibrațiilor forțate într-o secțiune $0 \le x \le \ell/2$ este

$$Y(x)=\frac{F_0}{4EI\alpha^3}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{\alpha\ell}{2}-\sin\frac{\alpha\ell}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\alpha\ell}{2}\sin\frac{\alpha\ell}{2}+\cos\frac{\alpha\ell}{2}\operatorname{sh}\frac{\alpha\ell}{2}}(\sin\alpha x+\operatorname{sh}\alpha x)-\right.$$
$$\left.-\frac{\cos\frac{\alpha\ell}{2}+\operatorname{ch}\frac{\alpha\ell}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\alpha\ell}{2}\sin\frac{\alpha\ell}{2}+\cos\frac{\alpha\ell}{2}\operatorname{sh}\frac{\alpha\ell}{2}}(\cos\alpha x+\operatorname{ch}\alpha x)\right] \tag{5.52}$$

Săgeata dinamică la mijlocul barei este

$$Y\left(\frac{\ell}{2}\right)=\frac{F_0\ell^3}{16EI}\left(\frac{2}{\alpha\ell}\right)^3\frac{1+\cos\frac{\alpha\ell}{2}\operatorname{ch}\frac{\alpha\ell}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\alpha\ell}{2}\sin\frac{\alpha\ell}{2}+\cos\frac{\alpha\ell}{2}\operatorname{sh}\frac{\alpha\ell}{2}}\,. \tag{5.53}$$

Anulând numitorul expresiei (5.53) se obțin pulsațiile de rezonanță. Rezultă ecuația

$$\operatorname{th}\frac{\alpha\ell}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha\ell}{2}=0\,. \tag{5.54}$$

Primele trei rădăcini ale ecuației (5.54) sunt

$$\alpha_n\ell/2=2{,}365;\ \ 5{,}498;\ \ 8{,}639\,. \qquad n=1,\,2,\,3\,.$$

Valorile

$$(\alpha\ell)_{1s}=4{,}730\,;\ \ (\alpha\ell)_{2s}=10{,}996\,;\ \ (\alpha\ell)_{3s}=17{,}278\,; \tag{5.55}$$

sunt rădăcinile ecuației (5.20) corespunzătoare modurilor simetrice de vibrație.

Anulând numărătorul expresiei (5.53) se obțin pulsațiile de antirezonanță. Rezultă ecuația

$$1+\cos\frac{\alpha\ell}{2}\operatorname{ch}\frac{\alpha\ell}{2}=0\,, \tag{5.56}$$

ale cărei prime trei rădăcini sunt

$$\alpha_n\ell/2=1{,}875;\ \ 4{,}694;\ \ 7{,}855\,; \qquad n=1,\,2,\,3\,,$$

sau

$$(\alpha\ell)^{(1)}=3{,}750\,;\ \ (\alpha\ell)^{(2)}=9{,}388\,;\ \ (\alpha\ell)^{(3)}=15{,}710\,.$$

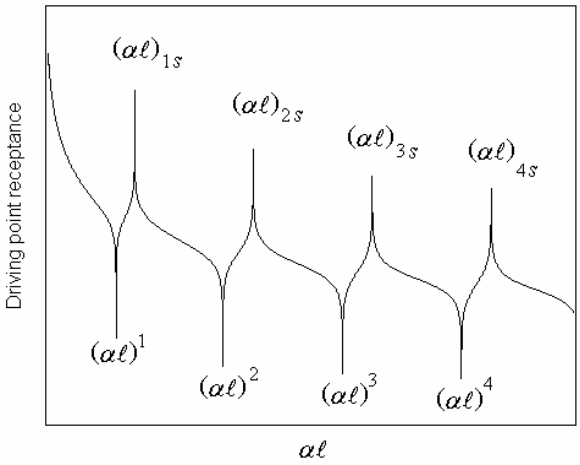


Fig. 5.17

Curba receptanței directe (în punctul de excitare) a barei libere la capete din fig. 5.16 este prezentată în fig. 5.17 în care s-a utilizat o scară verticală logaritmică.

Încărcare antisimetrică

Se consideră o bară de secțiune constantă, liberă la capete, acționată de un cuplu armonic $M_0 \cos \omega t$ aplicat la mijlocul barei (fig. 5.18).

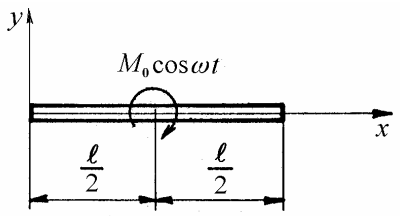


Fig. 5.18

Deplasarea laterală are expresia (5.49). Pentru jumătate de bară, condițiile la limită sunt

$$Y''(0)=0\,,\quad Y'''(0)=0\,,\quad Y'(\ell/2)=0\,,\quad EIY''(\ell/2)=-M_0/2\,. \qquad (5.57)$$

Amplitudinea vibrațiilor forțate într-o secțiune $0 \le x \le \ell/2$ este

$$Y(x)=\frac{M_0}{4EI\alpha^2}\left[\frac{\cos\frac{\alpha\ell}{2}+\operatorname{ch}\frac{\alpha\ell}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\alpha\ell}{2}\sin\frac{\alpha\ell}{2}-\cos\frac{\alpha\ell}{2}\operatorname{sh}\frac{\alpha\ell}{2}}(\sin\alpha x+\operatorname{sh}\alpha x)-\right.$$
$$\left.-\frac{\sin\frac{\alpha\ell}{2}+\operatorname{sh}\frac{\alpha\ell}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\alpha\ell}{2}\sin\frac{\alpha\ell}{2}-\cos\frac{\alpha\ell}{2}\operatorname{sh}\frac{\alpha\ell}{2}}(\cos\alpha x+\operatorname{ch}\alpha x)\right] \tag{5.58}$$

Anulând numitorul expresiei (5.58) se obține ecuația pulsațiilor

$$\operatorname{th}\frac{\alpha\ell}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha\ell}{2}=0\,. \tag{5.59}$$

Primele trei rădăcini ale ecuației (5.59) sunt

$$\alpha_n\ell/2=2{,}365;\ \ 5{,}498;\ \ 8{,}639\,. \qquad n=1,\,2,\,3\,.$$

Valorile

$$(\alpha\ell)_{1a}=3{,}927\,;\ \ (\alpha\ell)_{2a}=7{,}069\,;\ \ (\alpha\ell)_{3a}=10{,}21\,; \tag{5.60}$$

sunt rădăcinile ecuației (5.20) corespunzătoare modurilor antisimetrice de vibrație.

Dacă bara este acționată de o forță armonică $F_0\cos\omega t$ aplicată într-o secțiune oarecare, sarcinile echivalente aplicate la mijlocul barei sunt o forță şi un cuplu, deci răspunsul forțat se poate obține prin însumarea soluțiilor (5.52) şi (5.58). Pulsațiile de rezonanță au expresia (5.12)

$$\omega_n=(\alpha_n\ell)^2\sqrt{\frac{EI_z}{\rho A\ell^4}} \qquad n=1,\,2,\,3,\ldots$$

unde $\alpha_n\ell$ este dat de (5.52) şi (5.57). Se observă că

$$\alpha_{1s}=\alpha_1\,,\ \alpha_{1a}=\alpha_2\,,\ \alpha_{2s}=\alpha_3\,,\ \alpha_{2a}=\alpha_4\,,\ \alpha_{3s}=\alpha_5\,,\ \alpha_{3a}=\alpha_6\,,\ldots$$

Aceasta se explică scriind ecuația (5.20) sub forma

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha\ell}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha\ell}{2}}\cdot\frac{1+\operatorname{th}^2\frac{\alpha\ell}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{\alpha\ell}{2}}=1$$

care se mai scrie

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha\ell}{2}+\operatorname{th}\frac{\alpha\ell}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha\ell}{2}-\operatorname{th}\frac{\alpha\ell}{2}\right)=0\,. \tag{5.20,a}$$

Anulând fiecare factor se obțin ecuațiile pulsațiilor proprii (5.54) şi (5.59).

Exemplul 5.6

O bară prismatică cu lungimea $2a$ şi modulul de rigiditate la încovoiere EI este rezemată la capete pe arcuri de rigiditate k (fig. 5.19) şi solicitată la mijlocul deschiderii de o forță armonică transversală $F = F_0 \cos\omega t$. Se cere să se calculeze expresia amplitudinii vibrațiilor barei în punctul de aplicație al forței.

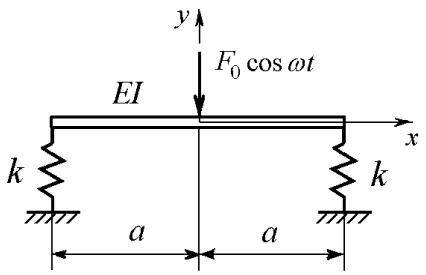


Fig. 5.19

Rezolvare. Deoarece forța F excită doar modurile simetrice de vibrație, se poate considera doar jumătatea din dreapta a barei, alegând originea axelor de coordonate în mijlocul acesteia.

În regim staționar, soluția ecuației de mişcare este de forma (5.45) în care deplasarea transversală $Y(x)$ este dată de (5.46). Condițiile la limită sunt

$$Y'(0)=0\,,\quad EIY'''(0)=-F_0/2\,,\quad Y''(a)=0\,,\quad EIY'''(a)=kY(a).$$

Săgeata dinamică la mijlocul barei este

$$Y(0)=\frac{F_0 a^3}{4EI}\,\frac{1}{(\alpha a)^3}\,\frac{1+\cos\alpha a\,\mathrm{ch}\alpha a+\kappa\left(\sin\alpha a\,\mathrm{ch}\alpha a-\cos\alpha a\,\mathrm{sh}\alpha a\right)}{\frac{1}{2}\left(\sin\alpha a\,\mathrm{ch}\alpha a-\cos\alpha a\,\mathrm{sh}\alpha a\right)-\kappa\cos\alpha a\,\mathrm{ch}\alpha a}\,, \quad (5.61)$$

unde s-a notat

$$\kappa=\frac{k}{\alpha^3 EI}\,.$$

Prin anularea numitorului expresiei (5.61) se obține ecuația pulsațiilor proprii pentru modurile simetrice de vibrație (5.46).

Pentru $\kappa = 0$ se obține expresia (5.53) stabilită pentru bara liberă la capete.

5.2 Vibrațiile longitudinale ale barelor

Se consideră o bară cu secțiunea transversală constantă A şi densitatea ρ, în care apar deplasări longitudinale $u = u(x,t)$ datorită forțelor axiale. În fig. 5.20 se prezintă forțele care acționează asupra unui element infinitezimal de lungime *dx* detaşat din bară.

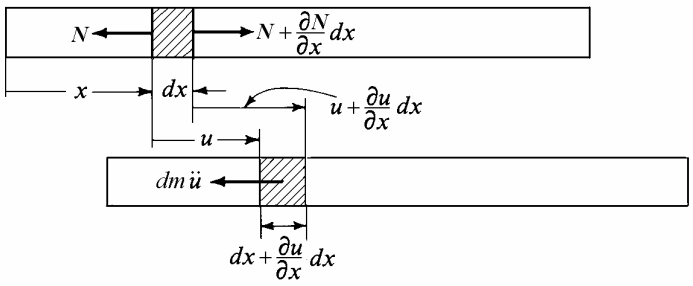


Fig. 5.20

Ecuația de mişcare în direcția *x* este

$$\left(N+\frac{\partial N}{\partial x}dx\right)-N-(\rho A dx)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\,,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,, \tag{5.62}$$

unde *u* este deplasarea în secțiunea *x*.

În secțiunea $x+dx$ deplasarea este $u+(\partial u/\partial x)dx$. Alungirea specifică axială este $\varepsilon_x=\partial u/\partial x$, tensiunea normală axială $\sigma_x=E\,\partial u/\partial x$, unde E este modulul de elasticitate longitudinal al materialului barei. Alungirea specifică poate fi exprimată în funcție de forța axială *N* sub forma

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{N}{EA}\,. \tag{5.63}$$

Combinând ecuațiile (5.62) şi (5.63) rezultă ecuația diferențială a vibrațiilor longitudinale libere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\rho}{E}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,. \tag{5.64}$$

Constanta $c = \sqrt{E/\rho}$ este viteza de propagare a undelor longitudinale în lungul barei.

Interesează în ce condiții poate avea loc o mişcare armonică sincronă definită printr-o soluție de forma

$$u(x,t) = U(x)\sin(\omega t + \phi). \tag{5.65}$$

Înlocuind soluția (5.65) în ecuația (5.64) rezultă

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2} + \beta^2 U = 0 \tag{5.66}$$

în care

$$\beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{E}. \tag{5.67}$$

Soluția generală a ecuației (5.66) este

$$U(x) = C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x. \tag{5.68}$$

Cele două constante de integrare C_1 şi C_2 se determină din condițiile la limită. La un capăt fix, deplasarea este zero, $u = 0$. La un capăt liber, tensiunile şi deci alungirile specifice sunt nule, $\partial u/\partial x = 0$. Efectul unei mase sau al unui arc ataşate la capătul barei poate fi de asemenea introdus prin condiții la limită.

Bara liberă la capete

La o bară liberă la ambele capete, $\partial u/\partial x = 0$ la $x = 0$ şi $x = \ell$. Rezultă $C_1 = 0$ şi, deoarece C_2 trebuie să fie diferit de zero pentru a exista vibrații, ecuația pulsațiilor proprii (ecuația caracteristică) este

$$\sin\beta\ell = 0. \tag{5.69}$$

Soluția ecuației (5.69) constă dintr-un număr infinit de valori proprii

$$\beta_n \ell = n\pi. \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Pulsațiile proprii rezultă din (5.67)

$$\omega_n = n\frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.70}$$

iar formele modale sunt definite de funcțiile proprii

$$U_n(x) = C\cos n\pi\frac{x}{\ell},$$

unde *C* este o amplitudine nedeterminată.

Răspunsul dinamic al unei bare cu masă şi elasticitate distribuite poate fi exprimat printr-o suprapunere de mişcări în modurile proprii de vibraţie ale barei. Acestea sunt mişcări armonice sincrone, la pulsaţia proprie respectivă, în care toate punctele vibrează în fază (sau în opoziţie), distribuţia spaţială a amplitudinilor fiind definită de funcţia proprie. În aplicaţii practice, seria infinită este trunchiată la modurile ale căror pulsaţii proprii sunt cuprinse în domeniul de pulsaţii de lucru ale barei.

Matricea de rigiditate dinamică

Este util să se compare matricea de rigiditate dinamică exactă pentru un segment de bară în vibraţii axiale (element articulat la capete) cu matricile obţinute pe baza funcţiilor de formă statice, (4.32) şi (4.38).

Notând u_1, u_2, deplasările nodale dinamice şi f_1, f_2, forţele nodale dinamice (pozitive în sensul pozitiv al axei *x*), ca în §4.2.1, condiţiile la capete sunt

$$U(0)=q_1,\quad U(\ell)=q_2,\quad U'(0)=-\frac{f_1}{EA},\quad U'(\ell)=\frac{f_2}{EA}. \tag{5.71}$$

Utilizând soluţia (5.68) rezultă

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin\beta\ell & \cos\beta\ell \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}=EA\beta\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \cos\beta\ell & -\sin\beta\ell \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix},$$

şi, pentru $\sin\beta\ell\neq 0$,

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}=EA\beta\begin{bmatrix} \operatorname{cotg}\beta\ell & -\operatorname{cosec}\beta\ell \\ -\operatorname{cosec}\beta\ell & \operatorname{cotg}\beta\ell \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix},$$

astfel încât matricea de rigiditate dinamică este

$$\left[k^{e}_{din}\right]=EA\beta\begin{bmatrix} \operatorname{cotg}\beta\ell & -\operatorname{cosec}\beta\ell \\ -\operatorname{cosec}\beta\ell & \operatorname{cotg}\beta\ell \end{bmatrix}. \tag{5.72}$$

Din dezvoltarea în serie Taylor, limitată la trei termeni, a coeficienţilor matricii dinamice (5.72), se obţine

$$EA\beta\operatorname{cotg}\beta\ell=\frac{EA}{\ell}-\omega^2\frac{\rho A\ell}{3}-\omega^4\frac{\ell^3(\rho A)^2}{45EA}-\ldots.,$$

$$-EA\beta \operatorname{cosec}\beta\ell = -\frac{EA}{\ell} - \omega^2 \frac{\rho A\ell}{6} - \omega^4 \frac{7\ell^3(\rho A)^2}{360EA} - \ldots .$$

În ambele dezvoltări, se observă că primul termen este egal cu elementul corespunzător din matricea de rigiditate (4.32) iar termenul al doilea este egal cu elementul respectiv din matricea de masă coerentă (4.38) înmulțit cu $\left(-\omega^2\right)$, ambele calculate utilizând funcțiile de formă statice (4.24).

Dacă matricea de rigiditate dependentă de pulsație este

$$\left[k^e\right] = \frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \omega^4(\rho A\ell)^2 \frac{\ell}{45EA}\begin{bmatrix} 1 & 7/8 \\ 7/8 & 1 \end{bmatrix}$$

iar matricea de masă coerentă dependentă de pulsație este

$$\left[m^e\right] = \frac{\rho A\ell}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \omega^2(\rho A\ell)^2 \frac{2\ell}{45EA}\begin{bmatrix} 1 & 7/8 \\ 7/8 & 1 \end{bmatrix}$$

se constată că al treilea termen din seriile de mai sus provine din elementele dependente de frecvență ale matricilor de masă şi de rigiditate.

5.3 Vibrațiile torsionale ale barelor

Ecuația de mişcare a unei bare în vibrații torsionale este similară cu cea pentru vibrațiile longitudinale stabilită în paragraful precedent şi are forma

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}, \tag{5.73}$$

unde θ este unghiul de răsucire în secțiunea x şi G este modulul de elasticitate transversal al materialului barei.

Pentru calculul modurilor proprii de vibrație se caută soluții armonice de forma

$$\theta(x,t) = \Theta(x)\sin(\omega t + \phi). \tag{5.74}$$

Înlocuind în ecuația (5.73), se obține

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2} + \gamma^2\Theta = 0 \tag{5.75}$$

unde

$$\gamma^2 = \omega^2\frac{\rho}{G}. \tag{5.76}$$

Soluția generală a ecuației (5.75) este

$$\Theta(x) = C_1 \sin \gamma x + C_2 \cos \gamma x \,. \tag{5.77}$$

Constantele de integrare C_1 şi C_2 se determină din condițiile la limită. La un capăt fix unghiul de răsucire este zero, $\theta = 0$. La un capăt liber, $\partial\theta/\partial x = 0$ (căci unghiul de răsucire produs de un moment de torsiune M este $d\theta = M\,\mathrm{d}x/GI_t$). Efectul momentelor concentrate, al arcurilor de torsiune şi al discurilor ataşate de bară poate fi de asemenea introdus prin condiții la limită naturale.

Bară fixă la un capăt şi liberă la celălalt capăt

La $x = 0$, $\theta = 0$, şi la $x = \ell$, $\partial\theta/\partial x = 0$. Rezultă $C_2 = 0$ şi ecuația pulsațiilor proprii

$$\cos \gamma \ell = 0 \,. \tag{5.78}$$

Ecuația (5.78) are un număr infinit de soluții de forma

$$\gamma_n \ell = \frac{2n-1}{2}\pi \,. \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Pulsațiile proprii sunt date de

$$\omega_n = \frac{2n-1}{2}\,\frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{G}{\rho}} \,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.79}$$

iar formele modurilor proprii de vibrație sunt definite de

$$\Theta_n(x) = C \sin \frac{2n-1}{2}\pi \frac{x}{\ell}$$

unde C este o amplitudine unghiulară nedeterminată.

Matricea de rigiditate dinamică

Prin analogie cu vibrațiile longitudinale, matricea de rigiditate dinamică a unui element de bară solicitat la răsucire este

$$\left[k^{\,e}_{din}\right] = GI_t\gamma \begin{bmatrix} \operatorname{cotg}\gamma\ell & -\operatorname{cosec}\gamma\ell \\ -\operatorname{cosec}\gamma\ell & \operatorname{cotg}\gamma\ell \end{bmatrix} \,. \tag{5.80}$$

unde γ este dat de (5.76) iar GI_t este modulul de rigiditate la răsucire. Această matrice exprimă momentele de răsucire dinamice nodale în funcție de unghiurile de răsucire dinamice nodale.

Utilizând dezvoltarea în serie Taylor ca în §5.2, rezultă următoarele matrici de rigiditate şi de masă dependente de pulsație

$$\left[k^e\right]=\frac{GI_t}{\ell}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\omega^4\left(\rho I_t\ell\right)^2\frac{\ell}{45GI_t}\begin{bmatrix}1 & 7/8\\ 7/8 & 1\end{bmatrix},$$

$$\left[m^e\right]=\frac{\rho I_t\ell}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}+\omega^2\left(\rho I_t\ell\right)^2\frac{2\ell}{45GI_t}\begin{bmatrix}1 & 7/8\\ 7/8 & 1\end{bmatrix}.$$

5.4 Grinzi Timoshenko

Rezultatele obținute în §5.1 sunt valabile pentru bare zvelte, la care se neglijează inerția la rotație şi deformațiile produse de forfecare. Analiza vibrațiilor barelor care include aceste efecte, cunoscută sub numele de *teoria Timoshenko a barelor*, este prezentată în partea a doua a lucrării. În general, prin considerarea acestor efecte rezultă pulsații proprii cu valori mai mici decât cele obținute din relația (5.6).

La o bară cu secțiunea constantă, simplu rezemată la capete, valorile pulsațiilor proprii calculate cu relația (5.14) au o eroare sub 5% dacă $nr/\ell<0{,}08$, unde $r=\sqrt{I/A}$ este raza de inerție a secțiunii transversale iar *n* este indicele modal.

O particularitate a barelor de tip Timoshenko este existența a două pulsații proprii diferite pentru fiecare tip de formă deformată a liniei elastice a barei. Pulsația mai mică se obține pentru un mod de vibrație în care deformațiile datorite încovoierii şi forfecării sunt în fază şi se însumează pentru a da deformația laterală totală. Pulsația mai mare corespunde unui mod de vibrație în care deformațiile de încovoiere şi cele de forfecare sunt în opoziție, iar deformația laterală totală este egală cu diferența lor.

În teoria lui Timoshenko, ipoteza de bază se referă la forma secțiunii transversale. Se presupune că secțiunile plane rămân plane în timpul vibrațiilor, dar nu sunt perpendiculare pe axa deformată a barei, ci rotite cu un unghi de lunecare specifică constant în toate punctele secțiunii (neglijând deplanarea datorită deformațiilor de forfecare). Acest unghi se calculează pe baza unei suprafețe efective obținute înmulțind aria reală a suprafeței secțiunii transversale cu un *factor de forfecare* care depinde de coeficientul lui Poisson al materialului şi de forma secțiunii barei.

6.
UNDE ELASTICE

În acest capitol se studiază undele elastice în medii solide. Pentru simplificarea expunerii, la început se prezintă propagarea undelor în bare drepte, deci într-un mediu elastic limitat, pentru care interpretarea fizică a relațiilor matematice este mai simplă. În continuare se tratează undele într-un mediu elastic, izotrop, omogen şi infinit, pornind de la ecuațiile generale ale mişcării în trei dimensiuni, apoi într-un semispațiu elastic omogen şi într-un semispațiu stratificat. Prezentarea se bazează pe un text scris pentru lucrarea [20] (L. Fetcu, 1975). În final se descriu pe scurt undele ghidate în plăci omogene.

6.1 Propagarea undelor

O perturbație produsă într-un mediu continuu se propagă sub formă de unde.

Dacă unui punct i se impune o deplasare, el antrenează prin forțele de legătură elastice şi punctele învecinate. Dacă deplasarea este variabilă în timp, punctul respectiv devine sursă de mişcare. Mişcarea lui se transmite de la punct la punct spre zonele neexcitate direct, aflate inițial în repaus. Cu cât punctele sunt mai îndepărtate de sursă, cu atât intră mai târziu în mişcare. În felul acesta, mişcarea se *propagă* prin mediu cu viteză finită.

Este de aşteptat ca soluțiile ecuațiilor de mişcare stabilite în cazul vibrațiilor sistemelor continue să descrie şi fenomenul de propagare a mişcării vibratorii, deoarece aceste ecuații sunt deduse pe baza legilor mecanicii, considerând aceleaşi forțe de legătură elastice care condiționează propagarea mişcării.

De exemplu, vibrațiile longitudinale armonice ale barelor prismatice sunt descrise de o deplasare $u(x,t)$ care poate fi scrisă sub forma

$$u(x,t) = X(x)\,T(t), \tag{6.1}$$

unde $X(x)$ este elongația deplasării axiale a punctelor din secțiunea *x*, iar $T(t)$ este funcția care descrie variația în timp a deplasării secțiunii considerate. Forma (6.1) a deplasării permite fie analiza mişcării vibratorii a punctelor barei dintr-o secțiune dată, fie determinarea distribuției deplasărilor în lungul axei longitudinale, la un moment dat.

Particularizând soluția (6.1) pentru cazul unei bare libere la capete (v. §5.2), în vibrație armonică (faza inițială nulă)

$$u(x,t) = a_0 \cos\alpha x \sin\omega t ,$$

unde

$$\alpha^2 = \frac{\rho}{E}\omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} ,$$

prin transformarea produsului de funcții trigonometrice în sumă, se obține

$$u(x,t) = a_0 \left[\sin(\omega t - \alpha x) + \sin(\omega t + \alpha x)\right] =$$
$$= a_0 \left[\sin\frac{\omega}{c}(c t - x) + \sin\frac{\omega}{c}(c t + x)\right].$$

Astfel deplasarea $u(x,t)$ se poate scrie sub forma unei sume a două funcții de câte o variabilă

$$u(x,t) = f(\xi_1) + f(\xi_2), \qquad (6.2)$$

unde

$$\xi_1 = c t - x , \qquad \xi_2 = c t + x , \qquad (6.3)$$

$$f(\xi) = a_0 \sin\frac{\omega}{c}\xi . \qquad (6.4)$$

Se consideră componenta $u_1(x,t)$ a deplasării $u(x,t)$, dată de funcția $f(\xi_1)$

$$u_1(x,t) = f(ct - x),$$

pentru care se poate scrie şirul de egalități evidente

$$u_1(x,t) = f(ct + c\Delta t - c\Delta t - x) = f\left[c(t + \Delta t) - (x + c\Delta t)\right] = u_1(x + c\Delta t, t + \Delta t)$$

sau, reținând termenii extremi,

$$u_1(x,t) = u_1(x + \Delta x,\, t + \Delta t), \qquad \Delta x = c\Delta t . \qquad (6.5)$$

Egalitățile (6.5) arată că deplasarea $u_1(x,t)$ din secțiunea *x* se regăseşte după timpul Δt într-o secțiune aflată la distanța $\Delta x = c\Delta t$, deci această valoare a

deplasării *s-a propagat* în *lungul axei x*, în sensul pozitiv, cu *viteza constantă* $c = \sqrt{E/\rho}$.

Funcția $f(ct - x)$ defineşte o *undă progresivă*. Caracterul de undă al unei mărimi (în acest caz – al deplasării) este dat de *forma argumentului* $\xi_1 = ct - x$ şi nu de forma funcției *f*, care arată ce tip de mărime fizică se propagă. Prin unda (6.4) se propagă o *deplasare armonică*.

În mod similar se arată că funcția $f(ct + x)$ descrie propagarea deplasării în sensul negativ al axei, constituind o *undă regresivă*. Despre deplasarea $u(x,t)$ se spune că *se propagă prin unde*. Mişcarea vibratorie a punctelor mediului poate fi deci privită ca o *suprapunere de unde progresive şi regresive*.

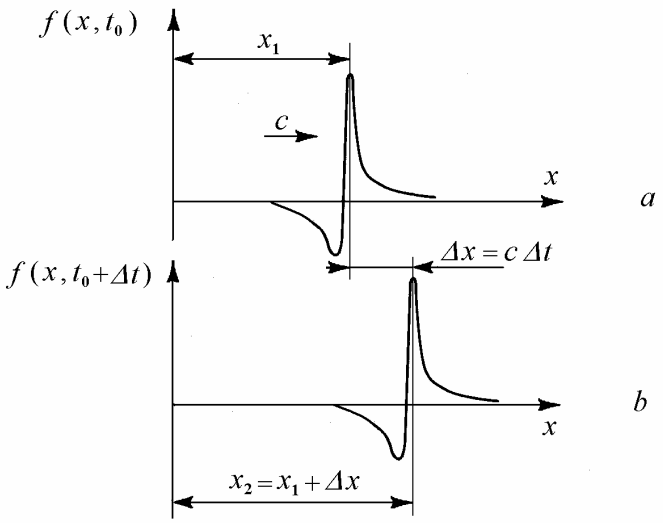


Fig. 6.1

Dacă se fixează timpul t_0, unda are o reprezentare dată de forma funcției $f(ct_0 - x)$ considerată ca funcție de *x*, adică $f(x, t_0)$ (de exemplu, ca în Fig. 6.1, *a*). După timpul Δt, deci la $t_0 + \Delta t$, deplasarea din secțiunea x_1 se regăseşte în secțiunea $x_2 = x_1 + c\Delta t$ (Fig. 6.1, *b*). Deoarece viteza *c* este independentă de secțiunea *x*, forma $f(x, t_0)$ s-a translatat după timpul Δt cu distanța $\Delta x = c\Delta t$, *fără să se deformeze*. Se spune că *unda se propagă în lungul axei x* (în spațiu), cu viteza constantă *c*.

În lichide nevâscoase şi gaze se propagă unde de compresiune-rarefiere (dilatare), prin care particulele se deplasează pe direcția de propagare.

În solide elastice, interacțiunile de forfecare produc şi alte tipuri de unde. În medii elastice nelimitate, se propagă *unde longitudinale* (unde P) şi *unde transversale* (unde S) în care particulele se deplasează pe direcția, respectiv perpendicular pe direcția de propagare. La suprafața mediilor elastice se propagă *unde Rayleigh* (unde R), în care particulele au traiectorii eliptice cu semiaxa mare perpendiculară pe suprafața solidului.

În medii elastice limitate se propagă *unde ghidate*. În straturi de grosime finită, dispuse deasupra semispațiului elastic, şi în plăci se propagă *unde Love* (unde Q), în care deplasarea particulelor este paralelă cu suprafața stratului şi perpendiculară pe direcția de propagare. În plăci se propagă *unde Lamb*, în care particulele se deplasează pe orbite eliptice în plane care conțin normala la suprafața plăcii şi direcția de propagare. *Undele Stoneley* sunt ghidate în lungul interfețelor în medii stratificate. Undele ghidate sunt descrise prin *moduri de undă*, similare *modurilor proprii de vibrație* ale elementelor structurilor de dimensiuni finite.

6.2 Unde longitudinale în bare prismatice

În bare prismatice se pot propaga trei feluri independente de unde: longitudinale, torsionale şi de încovoiere. Primele două tipuri sunt descrise de ecuația undelor, fiind *unde nedispersive*, ale căror viteze *nu* depind de frecvența de excitație sau lungimea de undă. În continuare se studiază doar undele longitudinale.

6.2.1 Ecuația undelor. Soluția lui d'Alembert

Se consideră ecuația de mişcare (5.52) pentru vibrațiile longitudinale libere ale barelor prismatice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,, \qquad c^2 = \frac{E}{\rho}\,, \tag{6.6}$$

cunoscută sub numele de *ecuație a undelor*, pentru care se face schimbarea de variabile dată de relațiile (6.3):

$$\xi_1 = c\,t - x\,, \qquad \xi_2 = c\,t + x\,.$$

Exprimând derivatele funcției $u(x,t)$ în noile variabile, se obține:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi_1}+\frac{\partial u}{\partial \xi_2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(c\frac{\partial u}{\partial \xi_1}+c\frac{\partial u}{\partial \xi_2}\right)=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2}\right).$$

Ecuația (6.6) este astfel redusă la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}=0, \tag{6.7}$$

numită *forma canonică* a ecuației undelor. Ea este satisfăcută de orice funcție $u(\xi_1,\xi_2)$ de tipul

$$u(\xi_1,\xi_2)=f_1(\xi_1)+f_2(\xi_2). \tag{6.8}$$

Trecând la variabilele inițiale, se obține *soluția lui d'Alembert* pentru ecuația undelor

$$u(\xi_1,\xi_2)=f_1(ct-x)+f_2(ct+x), \tag{6.9}$$

care exprimă deplasarea $u(x,t)$ ca suprapunerea a două unde: o *undă progresivă*, $f_1(ct-x)$, şi o *undă regresivă*, $f_2(ct+x)$. Formele funcțiilor f_1 şi f_2 nu sunt impuse prin ecuația (6.7); ele sunt determinate prin condițiile inițiale şi condițiile la limită ale problemei.

Valorile succesive ale deplasării $u(x,t)$ în timp, formează *fazele (etapele) mişcării*. Undele f_1 şi f_2 prin care se propagă aceste faze se numesc *unde de fază*. Despre punctele care au simultan aceleaşi deplasări se spune că sunt *în fază*.

Dacă deplasarea $u(x,t)$ este dată, de exemplu, de o undă progresivă

$$u(x,t)=f_1(ct-x),$$

fazele mişcării sunt complet determinate de valorile argumentului funcției f_1, $\xi_1=ct-x$, care se numeşte *faza undei*.

Punctele în care faza undei are aceeaşi valoare ξ_1 la un moment dat t_0 formează o *suprafață de undă*. Ecuația suprafeței de undă este deci

$$ct_0-x=\xi_1=\text{const.},$$

de unde, pentru că şi termenul ct_0 este constant, rezultă

$$x=ct_0-\xi_1=x_0. \tag{6.10}$$

Expresia (6.10) este ecuația unui plan normal pe axa longitudinală a barei, deci suprafața de undă este plană, iar undele de acest tip se numesc *unde plane*.

Suprafața de undă (6.10), caracterizată de faza ξ_1, se găseşte la timpul t_0 în secțiunea x_0 a barei. La timpul t_1 ea se găseşte în secțiunea x_1

$$x_1 = c\,t_1 - \xi_1,$$

parcurgând distanța

$$\Delta x = x_1 - x_0 = c\left(t_1 - t_0\right).$$

Rezultă că suprafața de undă, de fază ξ_1, se propagă în lungul axei Ox cu viteza constantă c, numită *viteză de fază*. Aceasta poate fi definită ca variația poziției x, dată de (6.10), pentru t variabil, când ξ_1 rămâne constant

$$c = \frac{\partial x}{\partial t}. \tag{6.11}$$

Există o infinitate de suprafețe de undă, corespunzătoare infinității de valori ale argumentului ξ_1. Suprafața de undă care separă zona perturbată de zona neperturbată se numeşte *front de undă*.

O suprafață de undă trece succesiv prin diferite puncte materiale ale barei. Direcția de propagare a suprafeței de undă coincide cu direcția de mişcare a punctelor materiale, care au în acest caz deplasări axiale. Undele pentru care direcția de propagare coincide cu direcția de deplasare a punctelor materiale se numesc *unde longitudinale*.

Viteza de mişcare a punctelor materiale aflate la un moment dat pe o suprafață de undă diferă de viteza de propagare a undei, c. Într-adevăr, viteza de mişcare este derivata în timp a deplasării $u\left(x,t\right)$. Pentru deplasarea dată printr-o undă progresivă, rezultă o viteză

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = c\,\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}\xi_1}. \tag{6.12}$$

Deformația specifică respectivă, ε_x, are expresia

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = -\,\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}\xi_1}, \tag{6.13}$$

deci, înlocuind $\varepsilon_x = \sigma_x / E$, rezultă pentru viteză

$$\dot{u}_p = -\varepsilon_x c = -\frac{\sigma_x c}{E}. \tag{6.14}$$

Astfel, într-o undă progresivă de dilatare $(\sigma_x > 0)$ punctele materiale se mişcă în sens invers direcţiei de propagare, iar pentru o undă de comprimare $(\sigma_x < 0)$ - în acelaşi sens.

Repetând raţionamentul pentru mişcarea propagată printr-o undă regresivă, se obţine

$$\dot{u}_r = \varepsilon_x c = \frac{\sigma_x c}{E}. \tag{6.15}$$

Viteza de mişcare şi viteza de propagare au acelaşi sens în unde de dilatare, şi sensuri opuse – în undele de comprimare.

6.2.2 Unde armonice

Dacă mişcarea care se propagă prin unde este periodică (bara vibrează longitudinal), deplasarea $u(x,t)$ pentru fiecare secţiune x este o funcţie periodică de timp. Când deplasarea este reprezentată sub forma (6.9), această condiţie este îndeplinită dacă funcţiile f_1 şi f_2 sunt periodice în timp.

Fie T perioada mişcării. Din condiţia de periodicitate în timp pentru unda progresivă, rezultă că într-o secţiune dată x are loc egalitatea

$$f_1(ct - x) = f_1[c(t+T) - x]. \tag{6.16}$$

Deoarece unda s-a deplasat în timpul T pe distanţa $\Lambda = cT$, aceeaşi valoare a funcţiei f_1 se regăseşte în secţiunea $x + \Lambda$

$$f_1(ct - x) = f_1[ct - (x + \Lambda)], \tag{6.17}$$

deci unda este o funcţie periodică în spaţiu, de perioadă $\Lambda = cT$.

Distanţa Λ se numeşte *lungime de undă*. Când punctele materiale efectuează un ciclu de oscilaţie, unda se deplasează cu o lungime de undă. După cum se constată din relaţia (6.17), punctele aflate la distanţă de o lungime de undă se mişcă în fază.

Cel mai simplu tip de undă este *unda armonică*

$$f_1(ct - x) = U_1 e^{iB(ct-x)} = U_1[\cos B(ct - x) + i \sin B(ct - x)], \tag{6.18}$$

cu U_1 şi B constante.

Faza undei armonice, φ, este argumentul funcţiei exponenţiale, care are perioada 2π. Dacă unda are perioada mişcării T şi lungimea de undă Λ, din condiţia de periodicitate în timp şi în spaţiu rezultă

$$Bct = B\Lambda = 2\pi,$$

de unde

$$B = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\Lambda}. \tag{6.19}$$

Faza undei devine astfel

$$\varphi = \frac{2\pi}{cT}\left(ct - x\right) = \frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\Lambda}x. \tag{6.20}$$

Variația fazei în unitatea de timp, într-o secțiune dată a barei,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{2\pi}{T} = \omega \tag{6.21}$$

este egală cu *pulsația* vibrației.

Modificarea fazei pe unitatea de lungime, la un anumit moment,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{2\pi}{\Lambda} = k \tag{6.22}$$

se numeşte *număr de undă*.

Rezultă

$$k = \frac{\omega}{c}. \tag{6.23}$$

Constanta U_1, egală cu valoarea maximă pe care o poate atinge deplasarea în unda f_1, este *amplitudinea undei*.

Unda armonică (6.18) devine

$$f_1\left(ct - x\right) = U_1 e^{\mathrm{i}(\omega t - kx)} = U_1\left[\cos\left(\omega t - kx\right) + \mathrm{i}\sin\left(\omega t - kx\right)\right]. \tag{6.24, a}$$

În mod similar, pentru o undă regresivă de aceeaşi pulsație, se obține

$$f_1\left(ct + x\right) = U_2 e^{\mathrm{i}(\omega t + kx)} = U_2\left[\cos\left(\omega t + kx\right) + \mathrm{i}\sin\left(\omega t + kx\right)\right]. \tag{6.24, b}$$

Deplasarea $u\left(x,t\right)$ este dată fie de partea reală, fie de partea imaginară a sumei celor două unde. Punctele în care deplasarea este nulă se numesc *noduri*. Punctele în care deplasarea este maximă se numesc *ventre*.

Pentru o undă progresivă, luând deplasarea egală cu partea reală a funcției $f_1\left(ct - x\right)$, nodurile se obțin din ecuația

$$\cos\left(\omega t - kx\right) = 0,$$

de unde rezultă

$$\omega t - kx = (2n+1)\frac{\pi}{2},$$

$$x = \frac{\omega}{k}t - (2n+1)\frac{\pi}{2k} = ct - (2n+1)\frac{\Lambda}{4}. \qquad (6.25)$$

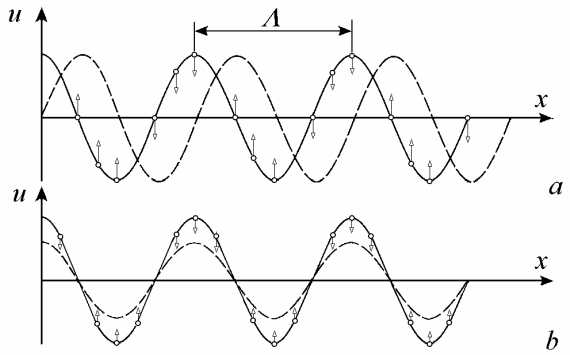


Fig. 6.2

În fiecare moment *t*, nodurile se găsesc în altă poziție, deplasându-se cu viteza *c*. Ventrele, care se află la distanța $\pm \Lambda/4$ de nodurile vecine, se deplasează cu aceeaşi viteză (Fig. 6.2, *a*). Deplasarea se produce în sensul pozitiv al axei sau în sens opus, după cum unda este progresivă sau regresivă.

Când deplasarea este dată de o sumă de unde – progresivă şi regresivă

$$u(x, t) = U_1 \cos(\omega t - kx) + U_2 \cos(\omega t + kx),$$

nodurile se obțin din ecuația

$$U_1 \cos(\omega t - kx) + U_2 \cos(\omega t + kx) = 0,$$

sau din ecuația echivalentă

$$(U_1 + U_2)\cos\omega t \cos kx - (U_2 - U_1)\sin\omega t \sin kx = 0. \qquad (6.26)$$

Când amplitudinile celor două unde sunt egale, $U_1 = U_2$, rezultă

$$2U_1 \cos\omega t \cos kx = 0,$$

sau

$$kx = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad x = (2n+1)\frac{\Lambda}{4}, \qquad (6.27)$$

deci nodurile nu se deplasează, unda rezultantă este *staționară* (Fig. 6.2, *b*).

Dacă $U_1 \neq U_2$, unda rezultantă este progresivă când $U_1 > U_2$ şi regresivă când $U_1 < U_2$. Poziția *x* a nodurilor este dată de soluția ecuației (6.26)

$$x = \frac{1}{k} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{U_1 + U_2}{U_2 - U_1} \frac{1}{\operatorname{tg} \omega t} \right)$$

iar viteza lor de propagare, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, nu mai este constantă.

Viteza de fază $c = \sqrt{E/\rho}$ depinde numai de caracteristicile materialului. Două unde de pulsații diferite $(\omega_1 \neq \omega_2)$ se propagă cu aceeaşi viteză *c*, dar au lungimi de undă diferite

$$\Lambda_1 = c\,T_1 = c\frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{k_1}, \qquad \Lambda_2 = c\,T_2 = c\frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{k_2}.$$

Când într-o bară se suprapun două unde armonice progresive de pulsații diferite, deplasarea rezultantă se obține însumând deplasările exprimate prin cele două unde, la acelaşi moment *t*, în aceeaşi secțiune *x*.

Se consideră, de exemplu, două unde armonice progresive de pulsații ω_1, ω_2, cu amplitudini egale şi faze inițiale nule

$$f_1(ct - x) = U_1 e^{\mathrm{i}(\omega_1 t - k_1 x)}, \qquad \frac{\omega_1}{k_1} = c,$$

$$g_1(ct - x) = U_1 e^{\mathrm{i}(\omega_2 t - k_2 x)}, \qquad \frac{\omega_2}{k_2} = c.$$

Dacă deplasarea este dată de părțile reale ale celor două unde, rezultă

$$\begin{aligned} u(x,t) &= Re(f_1) + Re(g_1) = \\ &= U_1\left[\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)\right] = \\ &= 2U_1 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right). \end{aligned} \tag{6.28}$$

Deplasarea (6.28) poate fi privită ca o undă de pulsație

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{2\pi}{T}$$

şi număr de undă

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{2\pi}{\Lambda},$$

care are viteza de fază

$$c_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} = \frac{\Lambda}{T}$$

şi amplitudinea U modulată

$$U = 2U_1 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right)., \quad (6.29)$$

aşa cum se arată în Fig. 6.3.

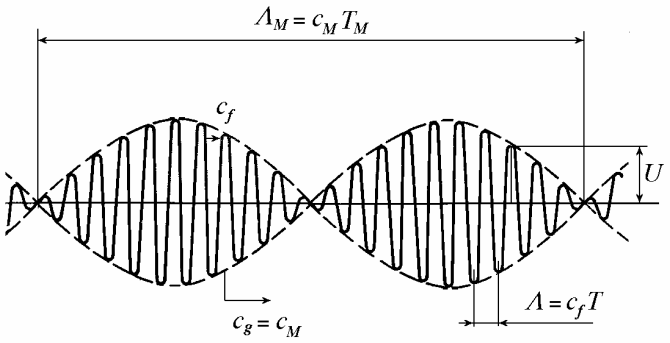


Fig. 6.3

Modulația se realizează tot printr-o undă, de pulsație

$$\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \frac{2\pi}{T_M},$$

care se propagă cu viteza

$$c_M = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

Când pulsațiile undelor componente diferă foarte puțin, modulația se face foarte lent $(\Delta\omega \to 0, \Delta k \to 0)$ şi viteza ei de propagare devine

$$c_g = \lim_{\omega_1 \to \omega_2} \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}. \quad (6.30)$$

Relația (6.30) definește *viteza de grup.* Deoarece pentru undele longitudinale $\frac{\omega_1}{k_1}=\frac{\omega_2}{k_2}=c$, se deduce că viteza de fază c_f a undei rezultante și viteza de grup c_g sunt constante și egale

$$c_f=\frac{\omega_1+\omega_2}{k_1+k_2}=c, \qquad c_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=c_M=c. \tag{6.31}$$

Modulația amplitudinii se propagă deci simultan cu unda modulată. Undele componente nu se deplasează relativ una față de alta; ele se numesc *nedispersive*.

6.2.3 Unde în bara de lungime finită

La extremitatea $x=0$ a barei finite din Fig. 6.4, se aplică o forță armonică de pulsație ω, reprezentată prin funcția complexă $F=F_0\,e^{\mathrm{i}\omega t}$. Deplasarea complexă, armonică, provocată inițial în secțiunea $x=0$, se propagă în sensul pozitiv al axei printr-o undă progresivă și la atingerea extremității $x=\ell$ se va reflecta, transformându-se într-o undă regresivă, care se suprapune defazat peste unda progresivă. Deplasarea se poate pune deci sub forma

$$u\left(x,t\right)=U_1\,e^{\mathrm{i}\left(\omega t-kx\right)}+U_2\,e^{\mathrm{i}\left(\omega t+kx\right)}, \tag{6.32}$$

amplitudinile U_1 și U_2 rezultând din condițiile la limită.

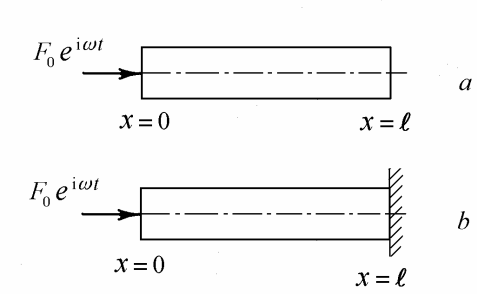


Fig. 6.4

Astfel, în secțiunea $x=0$, tensiunea de compresiune este dată de raportul între forța F și aria secțiunii A

$$\sigma_x(0)=-\frac{F}{A}=E\,\varepsilon_x(0)=E\,\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}, \tag{6.33}$$

de unde se obține

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -\mathrm{i}\,k\,U_1\,e^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{i}\,k\,U_2\,e^{\mathrm{i}\omega t} = -\frac{F_0}{EA}e^{\mathrm{i}\omega t}$$

sau

$$U_1 - U_2 = \frac{F_0}{\mathrm{i}\,kEA}\,. \tag{6.34}$$

Pentru bara liberă la ambele capete, în secțiunea $x=\ell$ tensiunea $\sigma = E\dfrac{\partial u}{\partial x}$ este nulă

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\ell} = -\mathrm{i}\,k\,U_1\,e^{\mathrm{i}(\omega t - k\ell)} + \mathrm{i}\,k\,U_2\,e^{\mathrm{i}(\omega t + k\ell)} = 0\,,$$

de unde rezultă

$$U_1\,e^{-\mathrm{i}k\ell} - U_2\,e^{\mathrm{i}k\ell} = 0\,. \tag{6.35}$$

Rezolvând sistemul format de ecuațiile (6.34) și (6.35) se obține

$$U_1 = -\frac{F_0}{2kEA}\frac{e^{\mathrm{i}k\ell}}{\sin k\ell}\,,\quad U_2 = -\frac{F_0}{2kEA}\frac{e^{-\mathrm{i}k\ell}}{\sin k\ell}\,, \tag{6.36}$$

Deplasarea (6.32) devine

$$u\,(x,t) = \frac{F_0}{2kEA}\frac{e^{\mathrm{i}k\ell}}{\sin k\ell}\left[e^{\mathrm{i}(\omega t - kx)} + e^{\mathrm{i}(\omega t + kx - 2k\ell)}\right]. \tag{6.37}$$

Se poate observa că unda progresivă și unda regresivă dau deplasări de același sens, iar la capătul $x=\ell$ dau aceleași valori. Unda regresivă este defazată față de unda progresivă cu unghiul constant

$$\theta = -2k\ell = -2\frac{\omega\ell}{c}\,,$$

corespunzător timpului $\dfrac{2\ell}{c}$ în care parcurge bara dus și întors. Bara intră în rezonanță pentru $\sin k\ell = 0$, de unde rezultă

$$k_n\ell = n\pi\,,\qquad \omega_n = n\frac{\pi c}{\ell} = \frac{n\pi}{\ell}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\,, \tag{6.38}$$

valoare obținută în (5.70) pentru pulsațiile proprii.

Unda rezultantă (6.37) este staționară. Această proprietate este pusă în evidență dacă se scrie deplasarea (6.37) sub forma echivalentă

$$u\left(x,t\right)=-\frac{F_0}{2kEA}\frac{e^{\mathrm{i}\omega t}}{\sin k\ell}\left[e^{\mathrm{i}k\left(\ell-x\right)}+e^{-\mathrm{i}k\left(\ell-x\right)}\right]=-\frac{F_0\,e^{\mathrm{i}\omega t}}{kEA}\frac{\cos k\left(\ell-x\right)}{\sin k\ell},$$

de unde rezultă că deplasarea $u\left(x,t\right)$ se anulează pentru

$$\cos k\left(\ell-x\right)=0,\qquad k\left(\ell-x\right)=\left(2n+1\right)\frac{\pi}{2},$$

$$x=\ell-\left(2n+1\right)\frac{\lambda}{4}. \tag{6.39}$$

Pentru *bara încastrată la capătul al doilea* (Fig. 6.4, *b*), punând condiția ca în încastrare deplasarea (6.32) să fie nulă

$$u\left(x,t\right)\big|_{x=\ell}=U_1e^{\mathrm{i}\left(\omega t-k\ell\right)}+U_2e^{\mathrm{i}\left(\omega t+k\ell\right)}=0,$$

sau

$$U_1e^{-\mathrm{i}k\ell}+U_2e^{\mathrm{i}k\ell}=0,$$

se obțin constantele U_1 şi U_2, deci deplasarea $u\left(x,t\right)$ este de forma

$$u\left(x,t\right)=-\frac{\mathrm{i}F_0}{2kEA}\frac{e^{\mathrm{i}k\ell}}{\cos k\ell}\left[e^{\mathrm{i}\left(\omega t-kx\right)}-e^{\mathrm{i}\left(\omega t+kx-2k\ell\right)}\right]. \tag{6.40}$$

Spre deosebire de cazul precedent, deplasările punctelor materiale în cele două unde au sensuri contrare, deci se scad, adică unda regresivă slăbeşte unda progresivă.

Deplasările reale se obțin din partea reală sau partea imaginară a deplasărilor complexe (6.37), (6.40), după cum forța armonică este dată de partea reală sau de partea imaginară a forței complexe $F_0e^{\mathrm{i}\omega t}$.

6.2.4 Propagarea energiei prin unde

Într-o bară elastică în vibrație, odată cu deplasarea $u\left(x,t\right)$ se propagă prin unde toate mărimile în expresia cărora intră deplasarea. Un interes deosebit prezintă propagarea energiei transmise mediului în vibrație de la sursa excitației.

Se consideră unda progresivă armonică

$$f_1\left(ct-x\right)=U_1e^{\mathrm{i}\left(\omega t-kx\right)},\qquad c=\frac{\omega}{k},$$

deplasarea $u\left(x,t\right)$ fiind dată de partea reală a undei

$$u\left(x,t\right)=U_1\cos\left(\omega t-kx\right). \tag{6.41}$$

Valoarea instantanee a energiei pe unitatea de lungime a barei de masă $m=\rho A$, care se deplasează cu viteza $\dot{u}=\partial u/\partial t$ şi este deformată cu ε_x sub acţiunea forţei axiale $\sigma_x A$, are expresia

$$W_0=W_c+W_p=\frac{1}{2}m\dot{u}^2+\frac{1}{2}\sigma_x A\varepsilon_x=\frac{1}{2}\rho A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \tag{6.42}$$

Introducând deplasarea (6.41) în (6.42) şi ţinând cont că $\omega^2=c^2k^2$ se obţine

$$W_0=\rho A\omega^2U^2\sin^2\left(\omega t-kx\right). \tag{6.43}$$

Deoarece W_0 nu este uniform distribuită pe unitatea de lungime, relaţia (6.43) indică de fapt energia punctelor materiale din secţiunea *x*, la momentul *t*. Aceasta se propagă printr-o undă progresivă de argument $\omega t-kx$, cu viteza constantă $c=\omega/k$. Printr-o secţiune *x*, în timpul $\mathrm{d}t$, trece energia conţinută într-o porţiune de bară de lungime $\mathrm{d}x=c\,\mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}W=W_0\,\mathrm{d}x=W_0\,c\,\mathrm{d}t\,.$$

Astfel, în unitatea de timp, prin secţiunea *x* se transferă o cantitate de energie

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=W_0\,c=\rho A\omega^2cU^2\sin^2\left(\omega t-kx\right), \tag{6.44}$$

reprezentând fluxul energiei la momentul *t*, egal cu puterea instantanee *P*, dezvoltată de forţa de compresiune $-\sigma_x A$ care imprimă punctelor din secţiune viteza $\dot{u}=\partial u/\partial t$

$$P=-\sigma_x A\dot{u}=-EA\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}=\rho A\omega^2cU^2\sin^2\left(\omega t-kx\right).$$

Energia conţinută într-o porţiune de bară de o lungime de undă Λ este egală cu cantitatea de energie care trece printr-o secţiune oarecare într-o perioadă *T*

$$W=\int_0^{\Lambda}W_0\,\mathrm{d}x=\int_0^{T}W_0\,c\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\rho A\omega^2U^2cT\,. \tag{6.45}$$

Se obține astfel energia medie distribuită pe unitatea de lungime a barei

$$W_m = \frac{W}{\Lambda} = \frac{1}{2}\rho A \omega^2 U^2 \tag{6.46}$$

şi fluxul mediu de energie printr-o secțiune

$$\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t} = \frac{W}{T} = \frac{1}{2}\rho A \omega^2 U^2 c\,. \tag{6.47}$$

Dacă unda este regresivă, energia se propagă în sensul negativ al axei x. Pentru o bară semi-infinită $(0 \le x < \infty)$ excitată în secțiunea de capăt $x = 0$ (Fig. 6.5), o undă regresivă ar trebui să transporte energie de la $+\infty$ către sursa de mişcare, fapt imposibil din punct de vedere fizic.

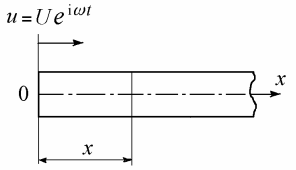


Fig. 6.5

Afirmația că energia nu poate fi radiată de la infinit spre zona unde se aplică excitația constituie *condiția de radiație*. Conform acesteia, în bara semi-infinită nu pot apare unde regresive. Dacă bara este de lungime finită, unda regresivă rezultă din reflectarea unei unde progresive şi readuce spre sursă energia purtată de aceasta şi nedisipată în mediul înconjurător.

6.2.5 Atenuarea undelor

În cazul materialelor cu amortizare mare, propagarea undelor nu mai este descrisă corect de ecuația (6.60). Se observă că dacă unei secțiuni i se impune, de exemplu, o deplasare armonică, de amplitudine constantă, această amplitudine descreşte în spațiu, în sensul propagării. Unda are amplitudinea descrescătoare, *se atenuează.*

Considerând că în prezența amortizărilor interne, la o variație armonică a tensiunii

$$\sigma = \sigma_0 e^{\mathrm{i}\omega t},$$

corespunde o variație armonică defazată în urmă a deformației specifice

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \, e^{\,\mathrm{i}(\omega t - \delta)},$$

se introduce în ecuația undelor modulul de elasticitate complex

$$E^* = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{\,\mathrm{i}\delta} = E_1 + \mathrm{i}\, E_2 = E_1 \left(1 + \mathrm{i}\, d\,\right). \tag{6.48}$$

Ecuația undelor devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^{*2}} \, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad c^* = \sqrt{\frac{E^*}{\rho}}, \tag{6.49}$$

Partea reală E_1 a modulului de elasticitate complex

$$E_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos\delta$$

este *modulul de elasticitate dinamic*, iar

$$d = \frac{E_2}{E_1} = \operatorname{tg}\delta$$

este *factorul de amortizare*.

Se poate defini astfel o *viteză de propagare complexă*

$$c^* = \sqrt{\frac{E_1\left(1+\mathrm{i}d\right)}{\rho}} = c_1 \left(1+\mathrm{i}d\right)^{1/2} = c_1 \sqrt{D}\, e^{\,\mathrm{i}\frac{\delta}{2}}, \quad D = \sqrt{1+d^2}, \tag{6.50}$$

care are sens doar în cazul propagării unei deplasări *armonice*, deoarece modulul de elasticitate complex (6.48) este definit pentru solicitări armonice.

Numărul de undă corespunzător este de asemenea complex

$$k^* = \frac{\omega}{c^*} = \frac{\omega}{c_1\sqrt{D}} e^{\,-\mathrm{i}\frac{\delta}{2}} = \frac{k_1}{\sqrt{D}}\, e^{\,-\mathrm{i}\frac{\delta}{2}} = k_r + \mathrm{i}\, k_i, \tag{6.51}$$

având partea reală şi cea imaginară date de relațiile

$$k_r = \frac{k_1}{\sqrt{D}} \cos\frac{\delta}{2} = k_1 \sqrt{\frac{D+1}{2D}}, \quad k_i = -\frac{k_1}{\sqrt{D}} \sin\frac{\delta}{2} = -k_1 \sqrt{\frac{D-1}{2D}}. \tag{6.52}$$

O undă progresivă prin care se propagă deplasarea armonică a secțiunii $x = 0$, dată de funcția complexă

$$u\left(0,t\right) = u_0 \; e^{\,\mathrm{i}\omega t}, \tag{6.53}$$

se poate pune sub forma

$$u(x,t) = u_0\ e^{\mathrm{i}(\omega t - k^* x)}, \tag{6.54}$$

care satisface atât condiția (6.53) cât şi ecuația (6.49).

Introducând numărul de undă complex (6.51) în expresia (6.54) a undei, rezultă

$$u(x,t) = u_0\ e^{\mathrm{i}(\omega t - k_r x - \mathrm{i} k_i x)} = u_0\ e^{k_i x}\, e^{\mathrm{i}(\omega t - k_r x)}. \tag{6.55, a}$$

sau

$$u(x,t) = u_0\ e^{-\alpha x}\, e^{\mathrm{i}(\omega t - k_r x)}, \tag{6.55, b}$$

unde coeficientul $\alpha = -k_i > 0$ se numeşte *constantă de atenuare*.

Partea reală $\beta = k_r$ a numărului de undă complex se numeşte *constantă de fază*. Numărul complex $\gamma = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$ se numeşte *constantă de propagare*.

Unda dată de expresia (6.55) *nu mai este armonică*, deoareace amplitudinea ei $U = u_0\ e^{-\alpha x}$ nu este constantă, ci descreşte exponențial în spațiu. Unda (6.55) se propagă cu viteza

$$c = \frac{\omega}{k_r} = \frac{\omega\sqrt{D}}{k_1 \cos\dfrac{\delta}{2}} = c_1 \frac{\sqrt{D}}{\cos\dfrac{\delta}{2}} = \frac{1}{\cos\dfrac{\delta}{2}} \sqrt{\frac{|E^*|}{\rho}}\,. \tag{6.56}$$

Deoarece factorul de amortizare d este în general mic în comparație cu unitatea, se poate face aproximarea

$$k^* = \frac{k_1}{(1+\mathrm{i}d)^{1/2}} \approx k_1\left(1 - \mathrm{i}\frac{d}{2}\right),$$

de unde rezultă

$$\alpha = k_1 \frac{\delta}{2}, \qquad \beta = k_1, \qquad c = \frac{\omega}{k_1} = c_1.$$

Pentru a caracteriza atenuarea undelor trebuie determinată experimental constanta α. O măsură a atenuării este mărimea, definită prin analogie cu decrementul logaritmic al vibrației (2.51), dată de logaritmul raportului a două amplitudini aflate la distanță de o lungime de undă

$$\Delta = \ln\frac{U_1}{U_2} = \ln\frac{u_0\, e^{-\alpha x}}{u_0\, e^{-\alpha(x+\Lambda)}} = \alpha\Lambda\,, \tag{6.57}$$

de unde rezultă constanta de atenuare

$$\alpha = \frac{1}{\Lambda} \ln \frac{U_1}{U_2} = \frac{\Delta}{\Lambda}. \qquad (6.58)$$

Se consideră două amplitudini U_1 şi U_3 aflate la distanța x_0, al căror raport este

$$\frac{U_3}{U_1} = e^{-\alpha x_0} = \frac{1}{e^{\alpha x_0}}.$$

Acest raport devine $\frac{1}{e} = 0{,}368$ când exponentul este $\alpha x_0 = 1$. Deci atenuarea este inversul distanței x_0 (Fig. 6.6).

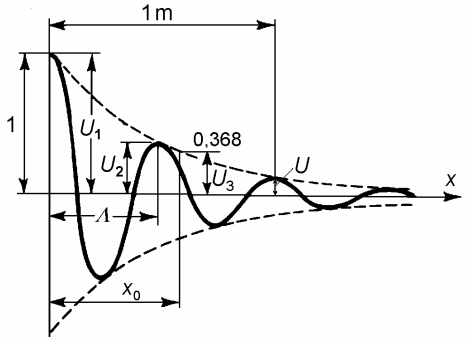


Fig. 6.6

Atenuarea α se măsoară în Neper/m (1 Neper = 8,686 dB). Ea este numeric egală cu logaritmul natural al raportului a două amplitudini măsurate la distanța de 1 m (Fig. 6.6)

$$\alpha = \ln \frac{U_1}{U} \qquad \text{[Neper/m]}.$$

În general, atenuarea este proporțională cu pătratul frecvenței undelor, deci valorile atenuării se dau la o anumită frecvență sau mediate pe un interval de frecvențe. Se recomandă determinarea experimentală a atenuării pentru fiecare material.

Problemele concrete de tipul celor rezolvate în § 6.2.3 se tratează analog, introducând în expresia undei (6.37) sau (6.40) numărul de undă complex k^*.

Studiul propagării undelor torsionale în bare prismatice conduce la rezultate similare cu cele obținute pentru propagarea undelor longitudinale, deoarece ecuația care descrie fenomenul are forma (6.6)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{1}{c_s^2}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\,,\qquad c_s=\sqrt{\frac{G}{\rho}}\,,$$

unde θ este unghiul de răsucire iar c_s - viteza de propagare a undelor de torsiune.

6.3 Unde transversale în bare prismatice

Spre deosebire de undele longitudinale şi cele torsionale, undele transversale în bare prismatice sunt dispersive, viteza lor depinzând de frecvența de excitație şi de lungimea de undă. În barele de lungime finită, undele progresive şi cele regresive se compun, producând unde staționare care constituie modurile proprii de vibrație.

6.3.1 Viteza de fază şi viteza de grup

În cazul vibrațiilor transversale libere ale barelor drepte, ecuația de mişcare a fost stabilită în Cap.5 sub forma

$$EI_z\,\frac{\partial^4 v}{\partial\, x^4}+\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0\,. \tag{6.59}$$

O deplasare armonică, reprezentată prin partea reală sau cea imaginară a funcției complexe

$$v(x,t)=Y(x)\,e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{6.60}$$

este soluție a acestei ecuații, dacă funcția $Y(x)$ satisface condiția

$$\frac{\mathrm{d}^4 Y}{\mathrm{d}\,x^4}-k_T^4 Y=0\,,\qquad k_T^4=\omega^2\,\frac{\rho A}{EI_z}\,,$$

de unde rezultă

$$Y(x)=C_1\,e^{-k_T x}+C_2\,e^{k_T x}+C_3\,e^{-\mathrm{i}k_T x}+C_4\,e^{\mathrm{i}k_T x}\,. \tag{6.61}$$

Introducând expresia (6.61) a funcției $Y(x)$ în relația (6.60), se obține

$$v(x,t)=\left(C_1\,e^{-k_T x}+C_2\,e^{k_T x}\right)e^{\mathrm{i}\omega t}+C_3\,e^{\mathrm{i}(\omega t-k_T x)}+C_4\,e^{\mathrm{i}(\omega t+k_T x)}\,. \tag{6.62}$$

În (6.62) se identifică două unde plane armonice: una progresivă

$$f_1\left(c_T t - x\right) = e^{\mathrm{i}\left(\omega t - k_T x\right)} \tag{6.63}$$

şi una regresivă

$$f_2\left(c_T t + x\right) = e^{\mathrm{i}\left(\omega t + k_T x\right)}, \tag{6.64}$$

care se propagă în lungul axei *x* cu viteza de fază c_T

$$c_T = \frac{\omega}{k_T} = \sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{EI_z}{\rho A}} = \sqrt{\omega}\sqrt{cr} = k_T cr = \frac{2\pi}{\Lambda_T} cr, \tag{6.65}$$

unde $k_T = \sqrt{\omega/cr}$ este numărul de undă, $c = \sqrt{E/\rho}$ este viteza de propagare a undelor longitudinale şi $r = \sqrt{I_z/A}$ este raza de inerţie a secţiunii transversale.

Deoarece direcţia de mişcare *y* a punctelor materiale este perpendiculară pe direcţia de propagare a undelor (6.63), (6.64), acestea se numesc *unde transversale*.

Viteza de propagare c_T depinde de pulsaţia ω a mişcării vibratorii propagate, astfel încât vibraţiile de frecvenţă mică $\left(f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}\right)$ se propagă mai încet decât vibraţiile de frecvenţă mare $\left(f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}\right)$,

$$c_{T_1} = \sqrt{\omega_1}\sqrt{cr} < c_{T_2} = \sqrt{\omega_2}\sqrt{cr}\,.$$

Când se suprapun două unde de pulsaţii diferite $\left(\omega_1 \neq \omega_2\right)$, unda rezultantă dată de (6.28) se propagă cu viteza

$$c_T = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_{T_1} + k_{T_2}},$$

diferită de vitezele de propagare ale undelor componente

$$c_{T_1} = \frac{\omega_1}{k_{T_1}}, \qquad c_{T_2} = \frac{\omega_2}{k_{T_2}},$$

şi de viteza de propagare a modulaţiei

$$c_M = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_{T_1} - k_{T_2}}.$$

Undele componente se deplasează relativ una faţă de alta, la fel unda rezultantă şi unda de modulaţie. Astfel de unde se numesc *dispersive*.

În cazul particular al compunerii a două mişcări de pulsații foarte apropiate $(\omega_1 \cong \omega_2)$, unda rezultantă are aproximativ aceeaşi viteză de fază ca şi undele componente

$$c_T = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_{T_1} + k_{T_2}} \approx \frac{2\omega_1}{2k_{T_1}} \approx \frac{2\omega_2}{2k_{T_2}}.$$

Viteza de grup, c_g, cu care se propagă modulația, *diferă de viteza de fază* comună, c_T,

$$c_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_T} = \frac{\mathrm{d}\left(k_T^2 cr\right)}{\mathrm{d}\,k_T} = 2k_T c\,r = 2c_T\,. \tag{6.66}$$

Relația de definiție a vitezei de fază (6.65) arată că, micşorând lungimea de undă Λ_T (ceea ce echivalează cu creşterea frecvenței oscilației transmise), se pot obține viteze de propagare a deplasărilor oricât de mari şi respectiv, viteze de grup duble. În realitate, atât viteza de fază cât şi viteza de grup sunt limitate superior, fapt care nu este pus în evidență de relația (6.65).

Această neconcordanță este rezultatul neglijării inerției la rotație a secțiunii transversale în ecuația (6.59) care, la frecvențe mari, deci la accelerații unghiulare mari, modifică aspectul fenomenului. Într-adevăr, introducând în ecuația (6.59) termenul $-I_z\rho\dfrac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2}$, corespunzător inerției la rotație a secțiunii transversale (Hamburger şi Buzdugan, 1958), aceasta devine

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{1}{c^2 r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0\,. \tag{6.67}$$

O undă de tipul (6.63) sau (6.64) satisface ecuația (6.67) dacă

$$k_T^4 - \frac{1}{c^2}\omega^2 k_T^2 - \frac{1}{c^2 r^2}\omega^2 = 0\,. \tag{6.68}$$

Introducând viteza de fază $c_T = \dfrac{\omega}{k_T}$ (sau $\omega = c_T k_T$) în relația (6.68), se obține

$$c_T = c\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{k_T^2 r^2}}} = c\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\Lambda_T^2}{4\pi^2 r^2}}} < c\,. \tag{6.69}$$

Pentru lungimi de undă $\Lambda_T > r$, se poate face aproximarea

$$1+\frac{\Lambda_T^2}{4\pi^2 r^2}\approx\frac{\Lambda_T^2}{4\pi^2 r^2},$$

obținându-se pentru viteza de fază expresia (6.65). Dacă $\Lambda_T << r$, această aproximare poate conduce la rezultatul absurd $c_T > c$, sau, la concluzia că pot exista viteze oricât de mari de propagare a undelor transversale, când $\Lambda_T \to 0$. Datorită modificării calitative a rezultatelor, neglijarea inerției de rotație a secțiunii transversale este permisă pentru frecvențe

$$f < 2\pi\frac{c}{r} = 2\pi\sqrt{\frac{EA}{\rho I_z}}.$$

De exemplu, pentru o bară de oțel cu diametrul de 100 mm, se poate utiliza ecuația (6.59) până la o frecvență de 10^6 Hz.

Exprimând ω în funcție de k_T din relația (6.68) şi derivând în rapot cu k_T, se obține *viteza de grup*

$$c_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_T} = c_T\frac{1+\dfrac{2}{k_T^2 r^2}}{1+\dfrac{1}{k_T^2 r^2}} > c_T, \qquad (6.70)$$

care, pentru lungimi de undă Λ_T mai mari ca raza de inerție *r*, devine

$$c_g \approx c_T\frac{\dfrac{2}{k_T^2 r^2}}{\dfrac{1}{k_T^2 r^2}} = 2c_T,$$

fiind de asemenea limitată superior de viteza de propagare a undelor longitudinale *c*, după cum se poate verifica uşor.

Din expresia (6.62) a deplasării $v(x,t)$ se constată că *numai o parte* a acestei deplasări se propagă prin unde. Considerând condițiile la limită specifice fiecărei probleme concrete, se pot determina constantele $C_1,\ldots,C_4$, deci se pot stabili amplitudinile undelor progresive şi regresive prin care se propagă mişcările armonice (6.62).

Problemele legate de transmiterea energiei prin unde transversale şi de atenuarea undelor transversale, se tratează ca şi pentru undele longitudinale, ținând

seama de concluziile obținute anterior cu privire la proprietățile de propagare ale mişcărilor transversale prin unde.

6.3.2 Unde în bara rezemată pe mediu elastic

În cazul unei rezemări continue pe un mediu deformabil, mediul se opune deplasărilor transversale ale barei printr-o reacțiune distribuită continuu, $p_r(x)$. Cea mai simplă lege de distribuție a reacțiunii opuse de un mediu elastic este obținută pe baza ipotezei lui Winkler, conform căreia reacțiunea este proporțională cu săgeata barei

$$p_r(x) = -\kappa v\,. \tag{6.71}$$

Dacă bara rezemată pe mediu vibrează transversal în planul *xOy*, în ecuația fibrei medii deformate

$$EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = p(x,t)$$

sarcina distribuită $p(x,t)$ este formată din forțele de inerție $-\rho A \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ şi din reacțiunea mediului (6.71), astfel încât ecuația de mişcare a barei devine

$$EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \kappa v = 0\,. \tag{6.72}$$

Pentru a constata dacă deplasările barei în vibrație armonică se pot propaga prin unde, se introduce funcția

$$v(x,t) = v_0\, e^{\mathrm{i}(\omega t \mp k_e x)} \tag{6.73}$$

în ecuația (6.72).

Notând

$$\frac{\rho A}{EI_z} = \frac{1}{c^2 r^2} = 4\,n^2\,, \qquad \frac{\kappa}{EI_z} = 4\,m^2\,,$$

rezultă că funcția (6.73) satisface ecuația (6.72) dacă

$$k_e^4 - 4n^2\omega^2 + 4m^4 = 0\,, \tag{6.74}$$

relație care precizează legătura între numărul de undă şi pulsația mişcării armonice propagate.

Viteza de propagare a undei (6.73)

$$c_e = \frac{\omega}{k_e},$$

se obține din (6.74) înlocuind $\omega = c_e k_e$

$$c_e = \frac{k_e}{2n}\sqrt{1+\frac{4m^4}{k_e^4}} = \frac{\pi}{n\Lambda_e}\sqrt{1+\frac{m^4}{4\pi^4}\Lambda_e^4}\,. \qquad . \qquad (6.75)$$

Deoarece viteza de propagare depinde de lungimea de undă $\Lambda_e = 2\pi/k_e$, undele sunt dispersive. Expresia (6.75) are un minim pentru $k_e = \sqrt{2}\,m$, deci există o viteză de propagare minimă

$$c_{e_{min}} = \frac{m}{n}, \qquad (6.76)$$

corespunzătoare pulsației

$$\omega^2 = \left(c_{e_{min}} k_e\right)^2 = \frac{2m^4}{n^2} = 2\frac{\kappa}{\rho A}\,. \qquad (6.77)$$

Dacă se analizează vibrațiile provocate de o sarcină transversală mobilă pe bară, atunci când sarcina se deplasează cu viteza $c_{e_{min}}$ grinda intră în rezonanță.

Înlocuind în (6.74) $k_e^4 = \frac{\omega^4}{c_e^4}$, se obține

$$c_e^2 = \frac{\omega^2}{2n\sqrt{\omega^2 - \frac{m^4}{n^2}}}\,.$$

Viteza de propagare are valori reale (propagarea se poate produce) pentru mişcări cu pulsații

$$\omega^2 > \frac{m^4}{n^2} = \frac{\kappa}{\rho A},$$

sau

$$\omega^2 \rho A v_0 > \kappa v_0\,, \qquad (6.78)$$

ceea ce înseamnă că amplitudinea forței de inerție distribuite trebuie să depășească amplitudinea reacțiunii distribuite a mediului elastic, condiție necesară mişcării vibratorii.

6.4 Unde în medii elastice

Studiul propagării undelor longitudinale şi transversale în bare s-a făcut pe baza ecuațiilor de mişcare simplificate, stabilite cu ipoteza secțiunii plane (Bernoulli), specifică Rezistenței materialelor. Pentru a controla efectul aproximărilor implicate în această ipoteză, se poate rezolva aceeaşi problemă pornind de la ecuațiile de mişcare generale ale unui mediu elastic izotrop.

6.4.1 Ecuațiile undelor în trei dimensiuni

Ecuațiile de mişcare generale ale unui mediu elastic (Nowacki, 1969) se deduc din studiul condițiilor de echilibru al unui element infinitezimal (Fig. 6.7), aplicând principiul lui d'Alembert.

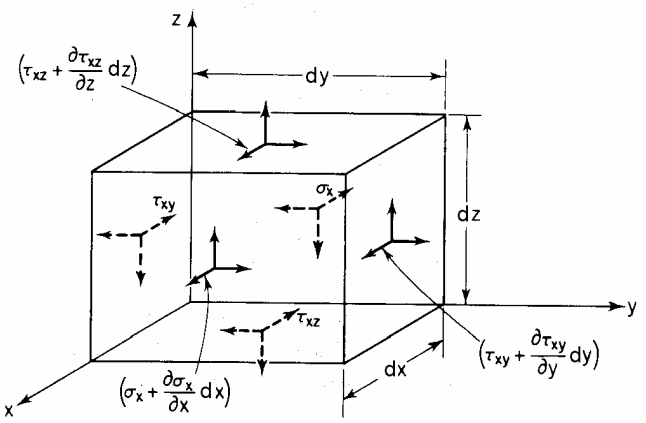


Fig. 6.7

Astfel, scriind echilibrul forțelor care acționează paralel cu axa x, se obține

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\sigma_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z-\tau_{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+$$
$$+\left(\tau_{xz}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\tau_{xz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\rho\left(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right)\frac{\partial^2u}{\partial t^2}.$$

Ecuații similare se pot scrie pentru forțele care acționează paralel cu axele y şi z. După reduceri şi simplificări, rezultă ecuațiile mişcării

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}=\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ ,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}=\rho\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\ , \qquad (6.79)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=\rho\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\ ,$$

în care u, v, w reprezintă deplasările în direcțiile *x*, *y*, respectiv *z*, ρ este masa specifică, iar *t* – timpul.

Pentru a exprima ecuațiile (6.79) numai în deplasări, se utilizează relațiile cunoscute între tensiuni şi deformații specifice, în care acestea din urmă se exprimă prin deplasările u, v şi w.

Se obțin astfel ecuațiile

$$(\lambda+G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x}+G\nabla^2 u=\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ , \qquad (6.80,\ a)$$

$$(\lambda+G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y}+G\nabla^2 v=\rho\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\ , \qquad (6.80,\ b)$$

$$(\lambda+G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z}+G\nabla^2 w=\rho\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\ , \qquad (6.80,\ c)$$

unde λ este constanta lui Lamé, ε_v este deformația volumică specifică şi ∇^2 - operatorul lui Laplace:

$$\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}=\frac{2\nu G}{1-2\nu},$$

$$\varepsilon_v=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\ .$$

Dacă se derivează ecuația (6.80, *a*) în raport cu *x*, ecuația (6.80, *b*) în raport cu *y* şi (6.80, *c*) în raport cu *z*, după însumarea lor rezultă

$$(\lambda+2G)\,\nabla^2\varepsilon_v=\rho\,\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial t^2}\ . \qquad (6.81)$$

Dacă se derivează ecuația (6.80, *a*) în raport cu *y* şi ecuația (6.80, *b*) în raport cu *x*, după scăderea lor rezultă

$$G\nabla^2\omega_z = \rho\,\frac{\partial^2\omega_z}{\partial t^2}\ , \tag{6.82}$$

unde

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

este componenta rotației față de axa *z*.

Procedând în mod asemănător, se obțin şi pentru componentele ω_y, ω_x ecuații de forma (6.82)

$$G\nabla^2\omega_y = \rho\,\frac{\partial^2\omega_y}{\partial t^2}\ , \qquad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \tag{6.83}$$

$$G\nabla^2\omega_x = \rho\,\frac{\partial^2\omega_x}{\partial t^2}\ , \qquad \omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right). \tag{6.84}$$

O ecuație de tipul

$$\nabla^2 F\left(x,y,z,t\right) = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\ , \tag{6.85}$$

este *ecuația undelor în trei dimensiuni*.

6.4.2 Unde longitudinale şi unde transversale

Se poate verifica uşor că orice funcție $F\left(\xi\right)$, unde ξ are forma

$$\xi = n_1 x + n_2 y + n_3 z - ct\,, \tag{6.86}$$

satisface ecuația (6.85), dacă este îndeplinită condiția

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1\,. \tag{6.87}$$

Ecuația

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = p \tag{6.88}$$

reprezintă un plan, pentru care n_1, n_2, n_3 sunt cosinuşii directori ai normalei şi *p* este distanța la originea sistemului de axe.

Deoarece au loc egalitățile evidente

$$F\left(p-ct\right)=F\left(p+c\Delta t-c\Delta t-ct\right)=F\left[\,p+\Delta p-c\left(t+\Delta t\right)\right],\ \Delta p=c\Delta t\,,$$

funcția $F(\xi)$ descrie propagarea unei *unde plane* în sensul pozitiv al normalei de cosinuşi directori n_1, n_2, n_3.

Deformația volumică specifică ε_v şi rotirile specifice ω_x, ω_y, ω_z se pot propaga deci prin unde plane, cu viteze diferite, ε_v cu viteza

$$c_P=\sqrt{\frac{\lambda+2G}{\rho}}=\sqrt{\frac{E\left(1-\nu\right)}{\rho\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}}\,, \tag{6.89}$$

iar ω_x, ω_y, ω_z cu viteza

$$c_S=\sqrt{\frac{G}{\rho}}<c_P\,. \tag{6.90}$$

Valori tipice pentru metale sunt $c_P=5-8\ \mathrm{km/s}$ şi $c_S\approx 0{,}5\,c_P$.

Relația (6.89) se mai scrie

$$c_P=\sqrt{\frac{K+\dfrac{4}{3}G}{\rho}}\,, \tag{6.89, *a*}$$

unde

$$K=\frac{E}{3\left(1-2\nu\right)}=\lambda+\frac{2}{3}G$$

este modulul de elasticitate volumic.

Se consideră cazul particular în care suprafața de undă este un plan paralel cu planul *yOz*, cu normala *Ox* $\left(n_1=1,\ n_2=n_3=0\right)$, iar deplasările u, v şi w sunt funcții de *x* şi *t*. În acest caz, atât deformația volumică specifică ε_v cât şi rotirile specifice ω_x, ω_y, ω_z sunt funcții de *x* şi *t*, obținându-se

$$\varepsilon_v=\frac{\partial u}{\partial x}\,,\qquad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ ,\qquad \omega_x=0\ ,\qquad \omega_y=-\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\ ,\qquad \omega_z=-\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}\ .$$

Ecuațiile (6.81)-(6.83) devin astfel

$$\left(\lambda+2G\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,, \tag{6.91, a}$$

$$G\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\rho\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\ , \qquad (6.91,\ b)$$

$$G\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\rho\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\ , \qquad (6.91,\ c)$$

şi coincid ca formă cu ecuațiile care rezultă prin particularizarea sistemului (6.80, *a*)-(6.80, *c*).

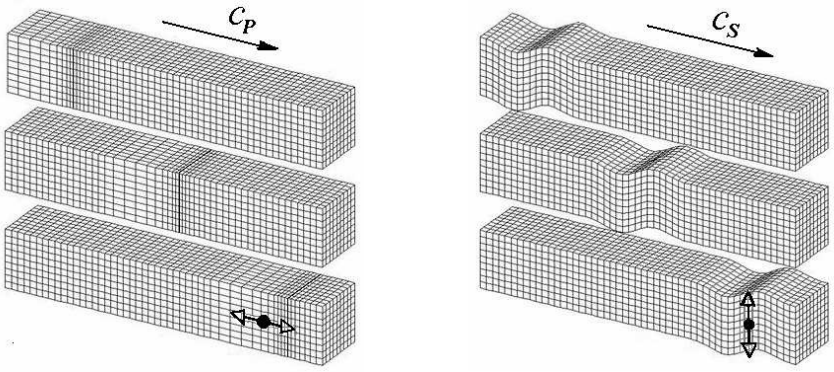
Ecuația (6.91, *a*) definește o undă plană *longitudinală*, $u(x,t)$, care se deplasează cu viteza (6.89). Ecuațiile (6.91, *b*) şi (6.91, *c*) definesc două unde *transversale* $v(x,t)$, $w(x,t)$, care se deplasează cu viteza (6.90).

Deformațiile de volum se propagă deci prin unde longitudinale, iar componentele rotațiilor – prin unde transversale. Deoarece $c_P > c_S$, în seismologie undele longitudinale se numesc *primare* (unde P), fiind primele înregistrate în cazul unui cutremur, având viteză de propagare mai mare. Undele transversale se numesc *secundare* (unde SH – în plan orizontal, unde SV – în plan vertical), având viteză de propagare mai mică, deci fiind înregistrate mai târziu.

Într-un mediu infinit se pot propaga unde sferice, dacă perturbațiile care le produc sunt simetrice față de un punct. Undele sferice sunt unde longitudinale şi se obțin sub forma

$$F(r,t)=\frac{1}{R}F_1(r-ct),\qquad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ ,$$

din ecuația (6.85) scrisă în cordonate sferice.



a *b*

Fig. 6.8

O reprezentare simplificată a propagării undelor este prezentată în Fig. 6.8, *a*, pentru undele longitudinale şi în fig. 6.8, *b* pentru undele transversale SV.

Atunci când undele P şi S ajung la o interfață sub un unghi diferit de 90^0, se produce o conversie a modurilor de propagare. Dacă o undă P întâlneşte o interfață, pot rezulta patru moduri de propagare: unde P reflectate şi transmise, unde SV reflectate şi transmise. Similar, atunci când o undă SV întâlneşte o interfață, aceleaşi patru moduri se produc în proporții diferite. Studiul reflecției şi refracției undelor depăşeşte cadrul acestui curs.

6.4.3 Unde Rayleigh

În cazul unui mediu omogen infinit, formele undelor care se pot propaga sunt determinate de excitație şi de condițiile inițiale, astfel încât deplasările la infinit să rămână finite şi, în plus, să fie satisfăcută condiția de radiație.

Dacă spațiul este limitat de un plan, introducerea condițiilor la limită pe suprafața respectivă permite punerea în evidență a unui tip particular de unde (J. W. Strutt, Lord Rayleigh, 1885) care se propagă numai în vecinătatea suprafeței limită, denumite *unde Rayleigh*.

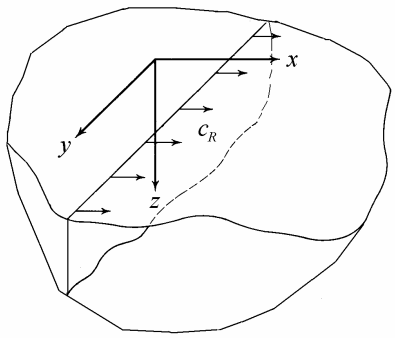


Fig. 6.9

Se consideră semispațiul mărginit de planul *xOy,* cu axa *z* orientată spre interiorul mediului (fig. 6.9), aflat într-o stare plană de deformație, astfel încât

$$u = u(x,z,t), \quad v = 0, \quad w = w(x,z,t). \tag{6.92}$$

Ținând seama că, pentru aceste condiții, se obține

$$\varepsilon_v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

ecuația de mişcare (6.80, *b*) este identic satisfăcută, iar ecuațiile (6.80, *a*, *c*) devin

$$c_P^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}\right)+c_S^2\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (6.93,\ a)$$

$$c_P^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+c_S^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \qquad (6.93,\ b)$$

Suprafața semispațiului este liberă, deci tensiunile σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} sunt nule pentru $z=0$:

$$\sigma_z(0,t)=\lambda\,\varepsilon_v+2G\varepsilon_z\big|_{z=0}=(\lambda+2G)\frac{\partial w}{\partial z}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{z=0}=0, \qquad (6.94,\ a)$$

$$\tau_{xz}(0,t)=G\,\gamma_{xz}\big|_{z=0}=G\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\bigg|_{z=0}=0. \qquad (6.94,\ b)$$

Condiția $\tau_{yz}\big|_{z=0}=0$ este identic satisfăcută, deoarece în toate punctele semispațiului deformația $\gamma_{yz}=\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}$ este nulă.

Ecuațiile (6.93, *a*, *b*) împreună cu condițiile (6.94, *a*, *b*) determină mişcările plane libere ale semispațiului elastic. Se pune problema dacă punctele materiale pot executa mişcări vibratorii armonice de pulsație ω în plane paralele cu *xOz*, care să se propage numai în lungul axei *Ox*, deci dacă deplasări de forma

$$u(x,z,t)=U(z)e^{\mathrm{i}(\omega t-k_R x)}, \qquad (6.95,\ a)$$

$$w(x,z,t)=W(z)e^{\mathrm{i}(\omega t-k_R x)}, \qquad (6.95,\ b)$$

satisfac ecuațiile obişnuite şi condițiile la limită.

Introducând funcțiile (6.95, *a*, *b*) în ecuațiile (6.93, *a*, *b*) şi rezolvând sistemul de ecuații diferențiale rezultat, liniar şi omogen în $U(z)$ şi $W(z)$, se obține

$$U(z)=C_1e^{-k_Rqz}+C_2e^{k_Rqz}+s\left(C_3e^{-k_Rsz}+C_4e^{k_Rsz}\right), \qquad (6.96,\ a)$$

$$W(z)=-\mathrm{i}q\left(C_1e^{-k_Rqz}+C_2e^{k_Rqz}\right)-\mathrm{i}\left(C_3e^{-k_Rsz}+C_4e^{k_Rsz}\right), \qquad (6.96,\ b)$$

unde *q* şi *s* sunt constante reale şi pozitive pentru ω dat

$$q=\left(1-\frac{\omega^2}{k_R^2c_P^2}\right)^{1/2}=\left(1-\frac{c_R^2}{c_P^2}\right)^{1/2},$$

$$s=\left(1-\frac{\omega^2}{k_R^2\,c_S^2}\right)^{1/2}=\left(1-\frac{c_R^2}{c_S^2}\right)^{1/2},\qquad c_R=\frac{\omega}{k_R}<c_S<c_P\,.$$

Pentru q sau s imaginar, ar rezulta componente ale deplasărilor u, w care se propagă şi în lungul axei z, ceea ce a fost exclus prin enunţul problemei.

Deoarece pentru $z\to\infty$ deplasările trebuie să rămână finite, rezultă $C_2=C_4=0$, funcţiile (6.96, *a*, *b*) devenind

$$U(z)=C_1\,e^{-k_R q z}+s\,C_3\,e^{-k_R s z}\,, \tag{6.97, a}$$

$$W(z)=-\mathrm{i}\left(q\,C_1\,e^{-k_R q z}+C_3\,e^{-k_R s z}\right). \tag{6.97, b}$$

Condiţiile la limită (6.94, *a*, *b*) sunt îndeplinite dacă funcţiile $U(z)$ şi $W(z)$ satisfac ecuaţiile

$$\left(\lambda+2G\right)W'(0)-\lambda\,k_R\,\mathrm{i}\,U(0)=0, \tag{6.98, a}$$

$$U'(0)-k_R\,\mathrm{i}\,W(0)=0, \tag{6.98, b}$$

de unde rezultă pentru constantele C_1 şi C_3 sistemul liniar şi omogen

$$\left(1+s^2\right)C_1+2s\,C_3=0\,,$$

$$2q\,C_1+\left(1+s^2\right)C_3=0\,.$$

Condiţia ca acest sistem să aibă soluţii nebanale (diferite de zero) se obţine prin anularea determinantului coeficienţilor

$$\left(1+s^2\right)^2-4sq=0\,, \tag{6.99}$$

de unde rezultă o ecuaţie pentru viteza de propagare $c_R=\dfrac{\omega}{k_R}$ a undelor Rayleigh, unde k_R este numărul de undă al undelor Rayleigh.

Introducând notaţiile

$$\frac{c_S^2}{c_P^2}=\frac{1-2\nu}{2\left(1-\nu\right)}=\varepsilon<1\,,\qquad \frac{c_R^2}{c_S^2}=\left(\frac{\omega}{k_R c_S}\right)^2=p<1\,,$$

ecuaţia (6.99) în necunoscuta p devine

$$f(p)=p^3-8p^2+\left(24-16\varepsilon\right)p-16\left(1-\varepsilon\right)=0\,, \tag{6.100}$$

formă cunoscută sub numele de *ecuaţia vitezei de fază a undelor Rayleigh*.

Dacă această ecuație admite o rădăcină reală pozitivă subunitară (care va da viteza de propagare c_R), rezultă că mișcările (6.95, *a*, *b*) sunt posibile. Deoarece $f(0) = -16\,(1-\varepsilon) < 0$ şi $f(1) = 1 > 0$, există o rădăcină reală $0 < p < 1$ şi se poate demonstra că ea este unică în acest interval.

Viteza de propagare a undelor Rayleigh este deci mai mică decât viteza de propagare a undelor transversale în acelaşi mediu $c_R < c_S$. Ea nu depinde de frecvența mișcării vibratorii, deci *undele Rayleigh* într-un mediu elastic omogen *sunt nedispersive*. În seismologie, datorită neomogenității solului, undele Rayleigh sunt dispersive, viteza lor crescând cu adâncimea.

Deoarece amplitudinile (6.97, *a*, *b*) scad exponențial cu adâncimea *z*, undele se numesc *de suprafață*. Cea mai mare parte a energiei lor se propagă printr-un strat limitat la suprafața semispațiului, atfel că atenuarea lor în direcția de propagare este mai lentă decât a undelor P sau S, care se propagă prin tot semispațiul.

S-a calculat că din totalul energiei transmise semispațiului de o presiune oscilantă normală la suprafața $z = 0$, uniform distribuită pe o zonă circulară, 67% se propagă prin unde Rayleigh, 26% prin unde transversale şi 7% prin unde longitudinale. De asemenea, pe seismogramele înregistrate în timpul unui cutremur sau al unei explozii în pământ, amplitudinile maxime – deci efectele distructive maxime – corespund undelor Rayleigh.

În general, $c_R = (0{,}87...0{,}95)\,c_S$. În oțel $c_R = 3$ km/s, $c_S = 3{,}25$ km/s.

Pentru sol se consideră de obicei $\lambda = G$, deci $\nu = \frac{1}{4}$. În acest caz $\varepsilon = \frac{1}{3}$ şi ecuația (6.100) admite ca rădăcină reală, pozitivă, subunitară $p = 2 - 2/\sqrt{3} = 0{,}8453$. Se obține astfel

$$c_R = 0{,}9194\,c_S,\ q = 0{,}8475,\ s = 0{,}3933,\ C_4 = -1{,}468\,C_2. \qquad (6.101)$$

Amplitudinile (6.97, *a*, *b*) devin

$$U(z) = C_1\left(e^{-0{,}8475\,k_R z} - 0{,}5773\,e^{-0{,}3933\,k_R z}\right), \qquad (6.102,\ a)$$

$$W(z) = -\mathrm{i}\,0{,}8475\,C_1\left(e^{-0{,}8475\,k_R z} - 1{,}7321\,e^{-0{,}3933\,k_R z}\right). \qquad (6.102,\ b)$$

În Fig. 6.10 s-a reprezentat, pentru $\nu = 0{,}25$, variația acestor amplitudini, raportate la valoarea de la suprafață, în funcție de variabila adimensională $\frac{z}{\Lambda_R}$, unde $\Lambda_R = 2\pi/k_R$ este lungimea de undă Rayleigh (Richart, Hall & Woods, 1970).

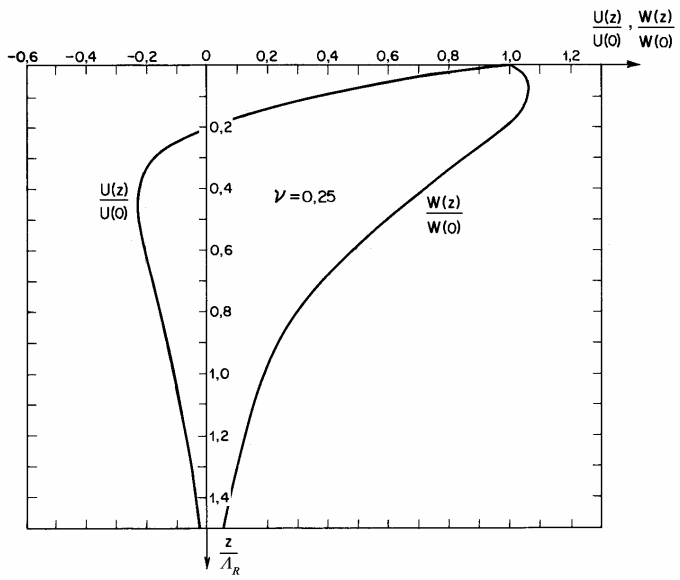


Fig. 6.10

Se constată că pentru $z_0 = 0{,}193\Lambda_R = \dfrac{1{,}21}{k_R}$ amplitudinea $U(z_0)$ a mişcării pe direcţia x (orizontală) este nulă. Punctele din acest plan se mişcă doar pe direcţia z (verticală). Amplitudinea mişcărilor pe verticală este maximă pentru $z_0 = 0{,}076\Lambda_R$, scăzând apoi rapid. La $z = \Lambda_R$ aceasta este doar 0,19 din amplitudinea punctelor de la suprafaţă.

Pentru un punct material, compunerea mişcărilor pe cele două direcţii x, z, conduce la o traiectorie eliptică. Astfel, dacă deplasările sunt date de părţile reale ale funcţiilor (6.95, *a*, *b*), pentru punctele de la suprafaţă se obţine ecuaţia parametrică a elipsei sub forma

$$u(x,0,t) = a\cos(\omega t - k_R x), \qquad (6.103, a)$$

$$w(x,0,t) = -1{,}468\, a\sin(\omega t - k_R x). \qquad (6.103, b)$$

În Fig. 6.11 este reprezentată traiectoria punctului material de coordonate $(x = 0, z = 0)$, iar în Fig. 6.12 – evoluţia fenomenului la suprafaţa semispaţiului într-o semiperioadă.

La suprafaţă particulele se deplasează pe orbite eliptice (sau circulare). Pe măsura îndepărtării de suprafaţă, particulele se deplasează pe orbite mai mici. La o anumită adâncime elipsele degenerează în linii drepte verticale (sau chiar puncte, denumite noduri). Sub această adâncime se inversează directivitatea mişcării în

lungul elipsei, după care apar regiuni în care alternează mişcarea eliptică cu nodurile sau traiectoriile verticale.

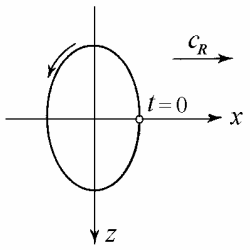


Fig. 6.11

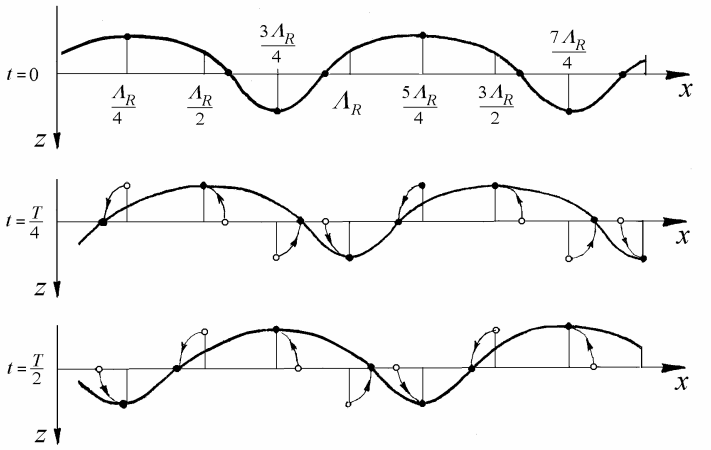


Fig. 6.12

Amplitudinea undelor Rayleigh descreşte după legea $1/\sqrt{r}$, unde r este distanța parcursă de undă de la focar.

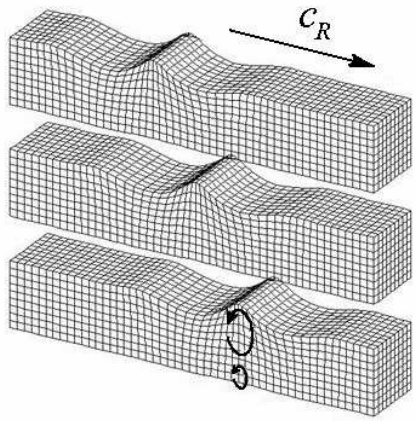


Fig. 6.13

O reprezentare simplificată a propagării undelor Rayleigh este arătată în Fig. 6.13. Se remarcă asemănarea undelor Rayleigh cu undele de la suprafața oceanelor.

În cazul a două semispații din materiale diferite, despărțite de o interfață comună, în lungul interfeței se propagă *unde Stoneley*. Acestea sunt tot unde nedispersive ca şi undele Rayleigh, dar pot exista doar pentru anumite domenii de variație a proprietăților celor două materiale în contact.

6.4.4 Unde Love

În cazul undelor Rayleigh, componentele orizontale u ale deplasărilor punctelor materiale sunt pe direcția de propagare x a undei, deci sunt deplasări longitudinale. Deplasările orizontale transversale v (pe direcția y, perpendiculară pe x) sunt nule.

Totuşi, în măsurările seismice s-a constatat existența unor deplasări orizontale transversale $v(x,z,t)$ independente de y, care se propagă de asemenea în direcția x. Apariția acestor unde de tip SH a fost explicată de A. E. G. Love (1911). El a arătat că existența lor este datorată structurii neomogene din punct de vedere mecanic a scoarței pământului, schematizată de el printr-un semispațiu *2*, acoperit cu un strat superficial *1*, de grosime H (Fig. 6.14).

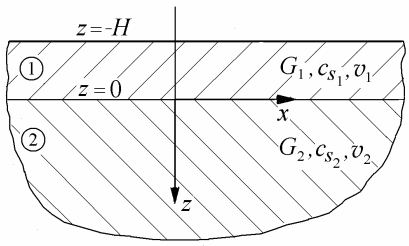


Fig. 6.14

Luând sistemul de axe cu originea în planul de separație al celor două medii, notând cu x direcția de propagare şi cu z axa verticală, deplasarea armonică propagată printr-o undă Love are componentele

$$v(x,z,t) = V(z)\, e^{\mathrm{i}(\omega t + k_L x)}, \qquad u \equiv 0\,,\ w \equiv 0\,. \tag{6.104}$$

De notat că în continuare se lucrează cu semnul plus în paranteza exponentului soluției (6.104), deci cu unde Love *regresive*.

Ecuațiile de mişcare (6.80, *a*, *c*) sunt identic satisfăcute, iar ecuația (6.80, *b*) devine

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{c_S^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\ . \tag{6.105}$$

Condițiile la limită se pun pe suprafața liberă $z = -H$, pe care

$$\sigma_z = \tau_{xz} \equiv 0\,, \quad \tau_{yz} = G\,\gamma_{yz} = G\,\frac{\partial v_1}{\partial z}\bigg|_{z=-H} = 0 \tag{6.106}$$

şi pe suprafața de separație, pe care deplasările şi tensiunile sunt continue

$$z = 0\,, \qquad \left(\tau_{yz}\right)_1 = \left(\tau_{yz}\right)_2, \tag{6.107}$$

$$v_1\left(x,0,t\right) = v_2\left(x,0,t\right).$$

Introducând funcția $v\left(x,z,t\right)$ în ecuația (6.105), se obține

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}z^2} - k_L^2\left(1 - \frac{\omega^2}{k_L^2\,c_S^2}\right)V = 0\,,$$

de unde rezultă

$$V(z) = \overline{C}\,e^{k_L s z} + C\,e^{-k_L s z}\,, \tag{6.108}$$

unde

$$s = \left(1 - \frac{\omega^2}{k_L^2\,c_S^2}\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{c_L^2}{c_S^2}\right)^{1/2}, \qquad c_L = \frac{\omega}{k_L}\,.$$

Parametrul s poate fi real sau imaginar, după cum $c_L < c_S$, respectiv $c_L > c_S$.

Particularizând în funcția (6.108) constantele elastice ale mediilor, se obțin amplitudinile deplasărilor $V_1(z)$ în mediul *1* şi $V_2(z)$ în mediul *2*

$$V_1(z) = \overline{C}_1\,e^{k_L s_1 z} + C_1\,e^{-k_L s_1 z}\,, \qquad z \le 0\,, \tag{6.109, a}$$

$$V_2(z) = \overline{C}_2\,e^{k_L s_2 z} + C_2\,e^{-k_L s_2 z}\,, \qquad z \ge 0\,. \tag{6.109, b}$$

Deoarece amplitudinea $V_2(z)$ trebuie să rămână limitată când $z \to \infty$, rezultă $\overline{C}_2 = 0$. Condițiile (6.106), (6.107) impuse funcțiilor (6.109, *a*, *b*) conduc la sistemul algebric omogen cu necunoscutele $\overline{C}_1$, C_1, C_2:

$$\overline{C}_1\,e^{-k_L s_1 H} - C_1\,e^{k_L s_1 H} = 0\,, \tag{6.110, a}$$

$$G_1\,s_1\left(\overline{C}_1 - C_1\right) = -G_2\,s_2\,C_2\,, \tag{6.110, b}$$

$$\overline{C}_1 + C_1 = C_2\,, \tag{6.110, c}$$

Anulând determinantul coeficienților se obține ecuația

$$\text{th}\, k_L s_1 H = -\frac{G_2 s_2}{G_1 s_1}, \tag{6.111}$$

în care

$$s_1 = \left(1 - \frac{c_L^2}{c_{S_1}^2}\right)^{1/2}, \qquad s_2 = \left(1 - \frac{c_L^2}{c_{S_2}^2}\right)^{1/2}. \tag{6.112}$$

Pentru ca în partea infinită *2* a semispațiului undele să se propage numai în direcția *x*, este necesar ca s_2 să fie real, deci $c_L < c_{S_2}$. În aceste condiții, ecuația (6.111) are rădăcini reale (deci viteze reale de propagare, c_L, ale undelor Love) dacă $c_L > c_{S_1}$, de unde rezultă că s_1 este imaginar

$$s_1 = \text{i}\left(\frac{c_L^2}{c_{S_1}^2} - 1\right)^{1/2} = \text{i}\,|s_1| = \text{i}\,r. \tag{6.113}$$

Deoarece, în general, $\text{th}\,\text{i}\alpha = \text{i}\,\text{tg}\,\text{i}\alpha$, ecuația (6.111) devine

$$f(c_L) = G_2\left(1 - \frac{c_L^2}{c_{S_2}^2}\right)^{1/2} - G_1\left(\frac{c_L^2}{c_{S_1}^2} - 1\right)^{1/2} \text{tg}\, k_L H\left(\frac{c_L^2}{c_{S_1}^2} - 1\right)^{1/2} = 0, \tag{6.114}$$

cu condiția

$$c_{S_1} < c_L < c_{S_2}. \tag{6.115}$$

Se verifică uşor că există o valoare a vitezei c_L care satisface condiția (6.115) şi ecuația (6.114), deoarece $f(c_{S_1}) > 0$ şi $f(c_{S_2}) < 0$. Această valoare este funcție de numărul de undă k_L, deci undele Love sunt *dispersive*.

Viteza undelor Love este mai mare decât viteza undelor Rayleigh

$$c_R < c_L.$$

Pentru c_L determinat din ecuația (6.114), constantele $\overline{C}_1$, C_1, C_2 rezultă din sistemul (6.110), astfel că undele Love regresive în stratul superficial *1* sunt date de deplasarea

$$v_1(x,z,t) = \overline{C}_1\left[e^{\text{i}k_L r z} + e^{-\text{i}k_L r(2H+z)}\right] e^{\text{i}(\omega t + k_L x)}. \tag{6.116}$$

Funcția

$$f_1(x,z,t) = e^{\text{i}(\omega t + k_L x + k_L r z)} \tag{6.117}$$

reprezintă o undă plană care se propagă cu viteza $c_{S_1} = \dfrac{\omega}{k_{S_1}}$ pe direcția normală la planul $x - rz = const.$

Într-adevăr, argumentul φ al undei (6.117) se poate pune sub forma

$$\varphi = k_{S_1}\left(c_{S_1} t + \frac{k_L}{k_{S_1}} x + \frac{k_L}{k_{S_1}} rz \right),$$

în care

$$\frac{k_L^2}{k_{S_1}^2} + \frac{k_L^2}{k_{S_1}^2} r^2 = \frac{k_L^2}{k_{S_1}^2} + \frac{k_L^2 c_L^2}{k_{S_1}^2 c_{S_1}^2} - \frac{k_L^2}{k_{S_1}^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2} = 1,$$

deci este îndeplinită condiția (6.87) ca funcția (6.117) să satisfacă ecuația undelor (6.85).

Funcția

$$f_2(x,z,t) = e^{\mathrm{i}\,[\omega t + k_L x - k_L r(2H+z)]} \tag{6.118}$$

reprezintă o undă plană care se propagă cu viteza c_{S_1} pe o direcție normală la planul $x - rz = const.$, defazată față de unda $f_1(x,z,t)$.

Astfel, deplasarea v_1 este dată de suprapunerea a două unde cu direcții de propagare înclinate față de axa *x*, unda f_1 fiind incidentă pe planul de separație şi unda f_2 - reflectată.

Considerând deplasările punctelor materiale date de partea reală a funcției complexe (6.116), se obține

$$\Re e(v_1) = 2\overline{C}\cos k_L r(z+H)\cos\left[\omega t + k_L x - k_L rH\right]. \tag{6.119}$$

Amplitudinile V_{0_1}, variabile cu *z*,

$$V_{0_1} = 2\overline{C}\cos k_L r(z+H)$$

se anulează pentru valorile *z* care satisfac condiția

$$k_L r(z+H) = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad -H < z \le 0, \tag{6.120}$$

deci sunt dispuse în plane paralele cu suprafața liberă şi sunt maxime pentru $z = -H$, adică pe suprafața liberă. Undele Love sunt unde transversale polarizate orizontal (unde SH).

În Fig. 6.15 s-a reprezentat o undă Love regresivă în stratul *1,* în două poziții la interval de timp de $T/4$ $\left(T = 2\pi/\omega\right)$.

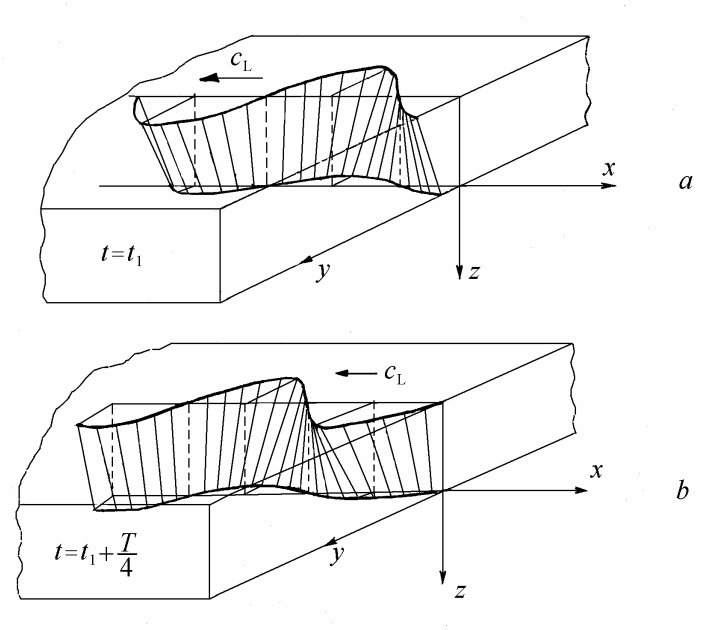


Fig. 6.15

S-a arătat (R. Jones, 1958) că pentru $\frac{G_2}{G_1} \geq 3$ soluțiile ecuației (6.114) sunt aproximativ cele corespunzătoare cazului $\frac{G_2}{G_1} \to \infty$, când ecuația devine

$$\text{tg}\, k_L H \left(\frac{c_L^2}{c_{S_1}^2} - 1 \right)^{1/2} \to \infty ,$$

deci pentru

$$k_L H \left(\frac{c_L^2}{c_{S_1}^2} - 1 \right)^{1/2} = \frac{\pi}{2} . \qquad (6.121)$$

Înlocuind în (6.121) pe $k_L = \frac{2\pi f}{c_L}$, unde f este frecvența vibrațiilor propagate, rezultă

$$\frac{1}{c_L^2} = -\frac{1}{16H^2}\frac{1}{f^2} + \frac{1}{c_{S_1}^2}, \tag{6.122}$$

deci $\frac{1}{c_L^2}$ depinde liniar de $\frac{1}{f^2}$ (Fig. 6.16).

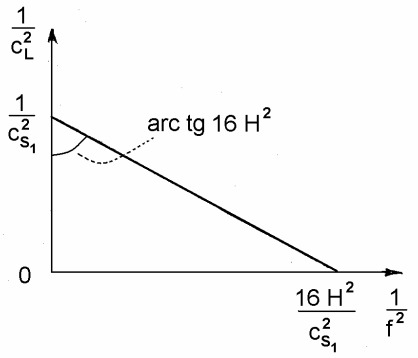


Fig. 6.16

Panta dreptei care reprezintă relația (6.122) este o mărime pe baza căreia poate fi determinată grosimea *H* a stratului superficial *1*.

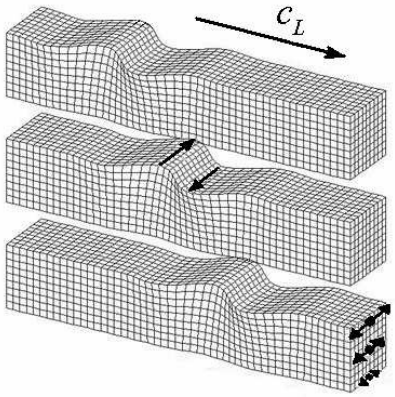


Fig. 6.17

O reprezentare simplificată a propagării undelor Love progresive este arătată în Fig. 6.17.

6.5 Unde ghidate în plăci

Într-un mediu elastic infinit se propagă doar două tipuri de unde nedispersive, undele longitudinale (de compresiune) şi undele transversale (de forfecare). Într-o placă se propagă două familii infinite de *unde Lamb*, ale căror viteze depind de raportul între lungimea de undă şi grosimea plăcii (H. Lamb, 1917), precum şi unde Love.

Undele ghidate sunt folosite în încercări nedistructive. Un semnal de scurtă durată conține o bandă finită de frecvențe. Componentele de joasă frecvență se propagă cu viteze diferite față de cele cu frecvențe înalte, rezultând o dispersie a pachetului de unde. Forma semnalului se modifică pe măsura propagării, în spațiu şi în timp, deci este importantă relația viteză-frecvență, reprezentată sub forma *curbelor de dispersie*. Dispersia nu este determinată de proprietățile materialului în care se propagă undele, ci de condițiile la limită impuse de structura ghidului de unde.

6.5.1 Unde Lamb în plăci

Se consideră o placă omogenă de grosime h pe direcția z, având dimensiuni infinite pe direcțiile x şi y. Pornind de la ecuațiile de mişcare în trei dimensiuni, se caută soluții armonice de forma (6.95), (6.96), în care $k_R = k$. Ele reprezintă unde sinusoidale care se propagă în direcția x, cu lungimea de undă $2\pi/k$ şi frecvența $\omega/2\pi$. Nu există deplasări în direcția y.

La suprafețele libere ale plăcii, tensiunile σ_z şi τ_{xz} sunt nule, deci condițiile la limită (6.94) sunt valabile la $z = \pm\dfrac{h}{2}$. Cele patru condiții conduc la un sistem liniar, omogen în constantele $C_1,\ldots,C_4$. Anulând determinantul coeficienților, rezultă două ecuații caracteristice, cunoscute ca *ecuațiile de dispersie ale undelor Lamb*.

Cu notațiile specifice undelor Lamb

$$\alpha = \mathrm{i}\,kq = \left(\frac{\omega^2}{c_P^2} - k^2\right)^{1/2}, \quad \beta = \mathrm{i}\,ks = \left(\frac{\omega^2}{c_S^2} - k^2\right)^{1/2}, \qquad (6.123)$$

unde numărul de undă

$$k = \frac{\omega}{c_f}, \qquad (6.124)$$

iar c_f este *viteza de fază a undelor Lamb* în placă, se obține, pentru *modurile simetrice* față de planul median al plăcii

$$\left(\beta^2 - k^2\right) \operatorname{tg}\frac{\alpha h}{2} + \left(4\alpha\beta k^2\right) \operatorname{tg}\frac{\beta h}{2} = 0\,, \qquad (6.125, a)$$

iar pentru *modurile antisimetrice* față de planul median al plăcii

$$\left(\beta^2 - k^2\right) \operatorname{cotg}\frac{\alpha h}{2} + \left(4\alpha\beta k^2\right) \operatorname{cotg}\frac{\beta h}{2} = 0\,. \qquad (6.125, b)$$

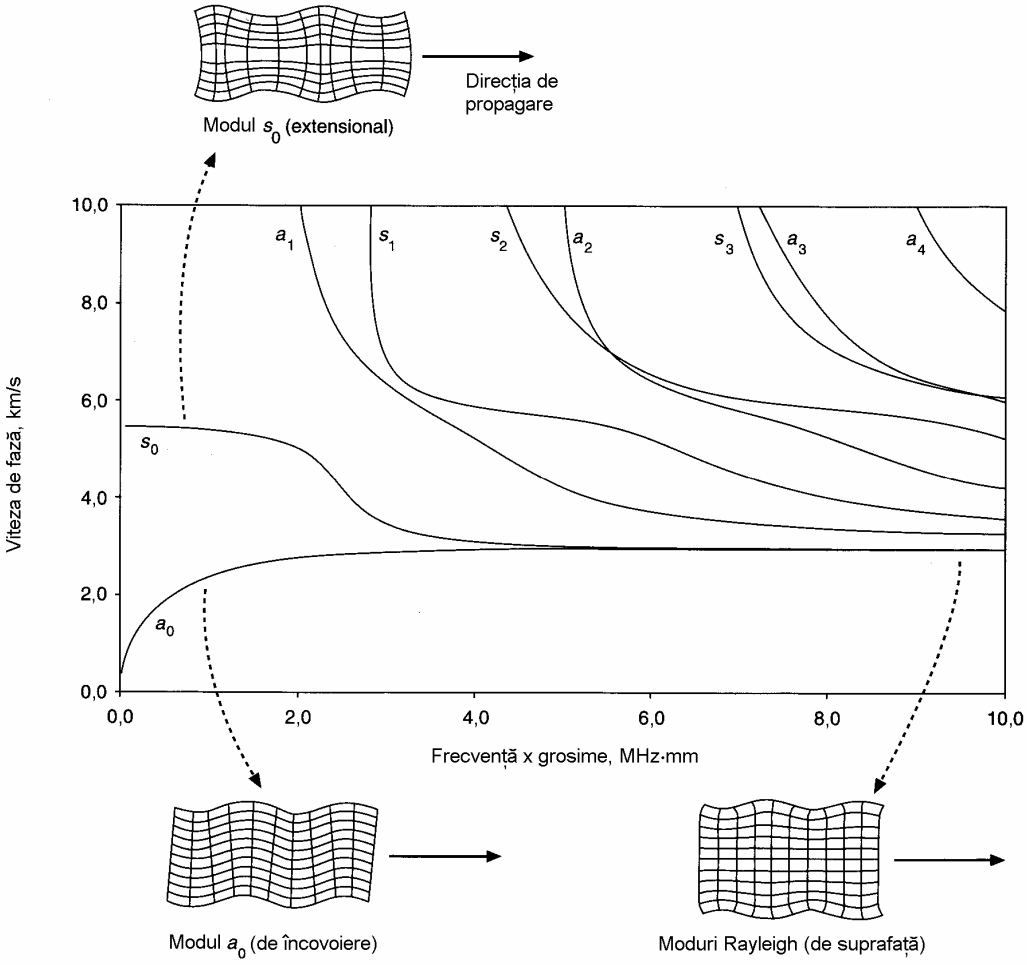


Fig. 6.18

Ecuațiile (6.125) sunt relații implicite între viteza de fază c_f a undelor Lamb (viteza crestelor undelor) şi produsul *frecvență* × *grosimea plăcii*, $f\,h$.

În fig. 6.18 se prezintă curbele de dispersie ale undelor Lamb pentru o placă din oțel (Lowe, 2002). Aceste curbe pot reprezenta modurile de propagare fie într-o placă de $1\,\text{mm}$ grosime în domeniul de frecvențe până la $10\,\text{MHz}$, fie într-o placă de $2\,\text{mm}$ grosime, la frecvențe până la $5\,\text{MHz}$. Modurile 's' sunt simetrice iar modurile 'a' sunt antisimetrice față de planul median al plăcii. Prin $0,1,2,..$ se arată indicele modului de propagare respectiv.

Modurile fundamentale, s_0 şi a_0, sunt cele mai utilizate în încercări nedistructive, fiind relativ distanțate între ele la frecvențe joase. Ele există la toate frecvențele şi în majoritatea aplicațiilor practice transportă mai multă energie decât modurile de ordin superior. Formele acestor moduri sunt reprezentate în fig. 6.18. Orbita eliptică a punctelor materiale are semiaxa mare în planul plăcii - la modul simetric, respectiv perpendiculară pe planul plăcii - la modul antisimetric.

La creşterea frecvenței, vitezele ambelor moduri variază, tinzând asimptotic la frecvențe înalte spre viteza undelor Rayleigh. La aceste frecvențe, formele modurilor de undă arată că mişcarea are loc tot mai mult doar în vecinătatea suprafețelor plăcii. La limită, în lungul ambelor suprafețe se propagă unde Rayleigh. În cazul modului s_0, cele două unde Rayleigh sunt în fază; în cazul modului a_0, ele sunt în antifază. În toate modurile Lamb, mişcarea particulelor are loc în planul definit de normala la suprafața plăcii şi direcția de propagare.

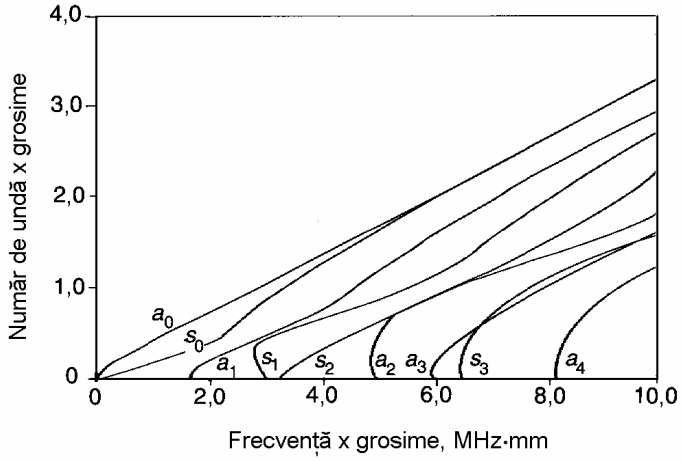


Fig. 6.19

O formă diferită a curbelor de dispersie a undelor Lamb este prezentată în fig. 6.19, unde s-a înlocuit viteza de fază prin numărul de undă (înmulțit cu grosimea plăcii).

Curbele vitezei de fază prezintă viteza *crestelor* undelor, dar aceasta nu este, de fapt, viteza de deplasare a unui impuls sau unui pachet de unde de scurtă durată. Un pachet de unde se deplasează cu *viteza de grup*, egală cu derivata pulsației în raport cu numărul de undă (6.30)

$$c_g = \frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,k}, \tag{6.126}$$

sau, în funcție de viteza de fază,

$$c_g = c_f - \Lambda_f \frac{\partial c_f}{\partial \Lambda_f}, \tag{6.127}$$

unde $\Lambda_f = 2\pi/k$ este lungimea de undă.

Aşa cum s-a arătat anterior, dacă semnalul corespunzător unui pachet de unde este o undă sinusoidală modulată în amplitudine de o înfăşurătoare, atunci unda modulantă se propagă cu *viteza de grup* în timp ce *crestele* undei sinusoidale în interiorul înfăşurătorii se deplasează cu *viteza de fază* pentru frecvența respectivă.

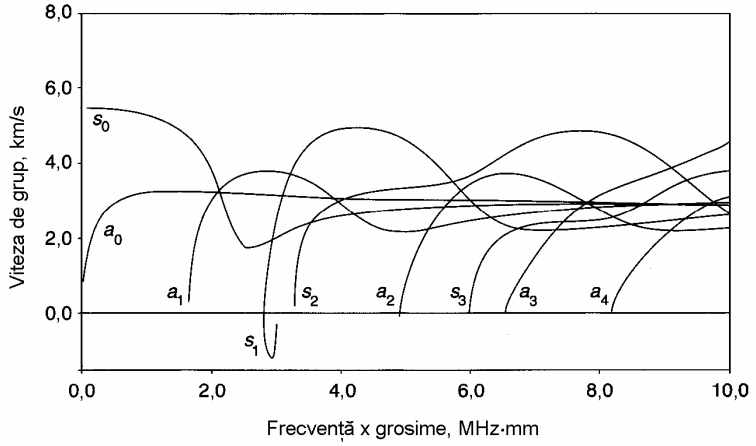


Fig. 6.20

Viteza de grup oferă deci informații asupra timpilor de propagare a pachetelor de undă pe distanțe mari, utile în controlul nedistructiv. Figura 6.20

prezintă curbele de dispersie ale vitezei de grup a undelor Lamb pentru o placă din oțel. Calculul acestora se poate face pe baza curbelor de dispersie a vitezei de fază (fig. 6.18) utilizând relația

$$c_g(\xi) = c_f(\xi)\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{c_f}{\xi \frac{\mathrm{d}c_f}{\mathrm{d}\xi}}}\right), \qquad (6.128)$$

în care $\xi = f\,h$, f este frecvența undei și h este grosimea plăcii.

6.5.2 Unde Love în plăci

Într-o placă orizontală infinită, în afara modurilor Lamb se pot propaga și moduri de undă transversale orizontale, de tip Love. În acest caz, mișcarea punctelor materiale are loc perpendicular pe direcția de propagare și paralel cu suprafața plăcii.

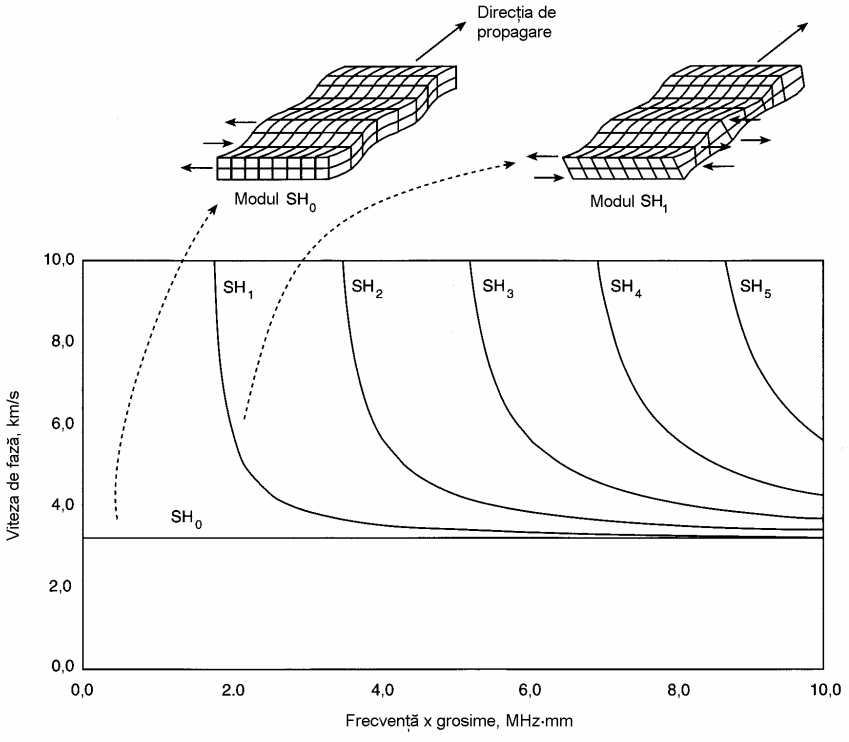


Fig. 6.21

În fig. 6.21 se arată curbele de dispersie ale modurilor Love calculate pentru o placă din oțel (Lowe, 2002), precum şi formele modale ale deplasărilor pentru primele două moduri.

În modul fundamental SH_0, deplasarea nu variază pe grosimea plăcii, ci numai în direcția de propagare. Ca urmare, viteza de propagare este egală cu viteza constantă a undelor transversale în trei dimensiuni, c_S.

În modul SH_1, variația deplasării pe grosimea plăcii are forma unei semi-sinusoide. Placa este deformată antisimetric, cu deplasări pozitive pe o suprafață şi negative pe cealaltă. Deplasările în modurile de ordin superior au legi de variație pe grosimea plăcii cu număr crescător de semiunde.

Trebuie notat că formele modale pentru fiecare mod SH sunt identice în orice punct de pe curba de dispersie, spre deosebire de majoritatea undelor ghidate, la care forma modală variază considerabil în lungul curbei de dispersie.

Bibliografie

1. Achenbach, J. D., *Wave Propagation in Elastic Solids*, North Holland, New York, 1984.

2. Ananiev, I. V., *Manual pentru calculul vibraţiilor proprii ale sistemelor elastice*, Gostehizdat, Moscova, 1946 (în l. rusă).

3. Babakov, I. M., *Teoria vibraţiilor*, Nauka, Moscova, 1965 (în l. rusă).

4. Babitsky, V. I., *Theory of Vibro-Impact Systems and Applications*, Springer, Berlin, 1998.

5. Beards, C. F., *Engineering Vibration Analysis with Application to Control Systems,* Edward Arnold, London, 1995.

6. Benaroya, H., *Mechanical Vibration, Analysis, Uncertainties and Control,* Prentice Hall International, Upper Saddle River, N.J., 1998.

7. Bendat, J. S. and Piersol, A. G., *Random Data: Analysis*, *Measurement and Procedures*, Wiley Interscience, New York, 1986.

8. Beranek, L. L., *Noise and Vibration Control*, McGraw-Hill, New York, 1971.

9. Biderman, V. A., *Teoria aplicată a vibraţiilor mecanice*, Vâsşaia Şkola, Moscova, 1972 (în l. rusă).

10. Biezeno, C. B. und Grammel, R., *Technische Dynamik*, Springer, Berlin, 1939.

11. Bishop, R. E. D., *Vibration*, Cambridge University Press, 1965.

12. Bishop, R. E. D., Gladwell, G. M. L. and Michaelson, S., *The Matrix Analysis of Vibration*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1965.

13. Bishop, R. E. D. and Johnson, D., *The Mechanics of Vibration*, Cambridge Univ. Press, 1960.

14. Bisplinghoff, R., Ashley, H. and Halfman, R., *Aeroelasticity*, Addison-Wesley, Cambridge, 1955.

15. Blake, M. P. and Mitchell, W. S., *Vibration and Acoustic Measurement Handbook*, Spartan, New York, 1972.

16. Blevins, R.D., *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1979.

17. Bogoliubov, N. N. şi Mitropolski, Iu. A., *Metode asimptotice în teoria oscilaţiilor neliniare*, ed. 3, Fizmatghiz, Moscova, 1963 (în l. rusă).

18. Braun, S., Rao, S. S. and Ewins, D. J. (eds.), *Encyclopedia of Vibration*, Academic Press, London, 2002.

19. Broch, J. T., *Mechanical Vibration and Shock Measurements*, 2nd ed., Brüel & Kjær, Nærum, 1980.

20. Buzdugan, Gh., Fetcu, L. şi Radeş, M., *Vibraţiile sistemelor mecanice*, Editura Academiei, Bucureşti, 1975.

21. Buzdugan, Gh., Fetcu, L. şi Radeş, M., *Vibraţii mecanice*, ed. 2, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1982.

22. Buzdugan, Gh., Mihăilescu E. şi Radeş, M., *Măsurarea vibraţiilor*, Editura Academiei, Bucureşti, 1979.

23. Buzdugan, Gh., Mihăilescu, E. and Radeş, M., *Vibration Measurement,* Martinus Nijhoff Publ., Dordrecht, 1986.

24. Bykhovsky, I. I., *Fundamentals of Vibration Engineering*, Mir Publishers, Moscow, 1972.

25. Church, A.. H., *Mechanical Vibrations*, Wiley, New York, 1957.

26. Clough, R. W. and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw Hill, New York, 1975.

27. Collar, A. R. and Simpson, A., *Matrices and Engineering Dynamics*, Ellis Horwood, Chichester, 1987.

28. Crandall, S. H. and Mark, W. D., *Random Vibration in Mechanical Systems,* Academic Press, New York, 1963.

29. Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations*, Dover, New York, 1985 (1st ed. Mc-Graw-Hill, New York, 1934).

30. Dimarogonas, A. D., *Vibration Engineering*, West Publ. Co., St. Paul, MN, 1976.

31. Dincă, F. şi Teodosiu, C., *Vibraţii neliniare şi aleatoare*, Editura tehnică, Bucureşti, 1969.

32. Ewing, W. M., Jardetzky, W. S. and Press, F., *Elastic Waves in Layered Media*, McGraw Hill, New York, 1957.

33. Ewins D. J., *Modal Testing: Theory, Practice and Application*, 2nd ed., Research Studies Press, Taunton, 2000.

34. Fertis, D. G., *Mechanical and Structural Vibrations*, Wiley, New York, 1995.

35. Filippov, A. P., *Vibraţiile sistemelor mecanice*, Naukova Dumka, Kiev, 1965 (în l. rusă).

36. Frazer, R. A., Duncan, W. J. and Collar, A. R., *Elementary Matrices,* AMS Press, New York, 1983 (Reprint of C.U.P. edition of the original 1938 text).

37. Gasch, R. und Knothe, K., *Strukturdynamik*, Band 1: *Discrete Systeme*. Band 2: *Kontinua und ihre Diskretisierung*, Springer, Berlin, 1987.

38. Geradin, M. and Rixen, D., *Mechanical Vibrations. Theory and Application to Structural Dynamics*, 2nd ed., Wiley, New York, 1997.

39. Graff, K. F., *Wave Motion in Elastic Solids*, Dover Publications, New York, 1991.

40. Hamburger, L. şi Buzdugan, Gh., *Teoria vibraţiilor cu aplicaţii în inginerie*, Editura tehnică, Bucureşti, 1958.

41. Hansen, H. M. and Chenea, P. F., *Mechanics of Vibrations*, Wiley, N.Y., 1952.

42. Harris, C. M. şi Crede, C. M. (editori), *Şocuri şi vibraţii*, Editura tehnică, Bucureşti, 1968 (trad. din l. engleză)..

43. Hayashi, C, *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*, McGraw-Hill, New York, 1964.

44. Heylen, W., Lammens, S. and Sas, P., *Modal Analysis Theory and Testing*, K. U. Leuven, 1997.

45. Hohenemser, K. und Prager, W., *Dynamik der Stabwerke*, Springer, Berlin, 1933.

46. Holzweissig, F. und Dresig, H., *Lehrbuch der Maschinendynamik*, 3rd ed., Fachbuchverlag, Leipzig, 1992.

47. Hunt, J. B., *Dynamic Vibration Absorbers*, Mechanical Engineering Publications, London, 1979.

48. Hurty, W. C. and Rubinstein, M. F., *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.

49. Ibrahim, R. A., *Parametric Random Vibration*, Research Studies Press Ltd., Taunton, 1998.

50. Inman, D. J., *Engineering Vibration*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1994.

51. Ioriş Iu. I., *Măsurarea vibraţiilor*, Maşghiz, Moscow, 1963 (în l. rusă).

52. Irretier, H., *Schwingungstechnik*, 2nd ed., University of Kassel, 1988.

53. Jacobsen, L. S. and Ayre, R. S., *Engineering Vibrations*, McGraw-Hill, New York, 1958.

54. James, M. L., Smith, G. M., Wolford, J. C. and Whaley, P. W., *Vibration of Mechanical and Structural Systems with Microcomputer Applications*, Harper & Row, New York, 1989.

55. Kauderer, H., *Nichtlineare Mechanik*, Springer, Berlin, 1958.

56. Kelly S. G., *Fundamentals of Mechanical Vibrations*, 2nd ed., McGraw-Hill Higher Education, New York, 2000.

57. Kelly S. G., *Schaum's Outline on Mechanical Vibrations*, McGraw-Hill Engineering CS, New York, 1996.

58. Ker Wilson, W. T., *Practical Solution of Torsional Vibration Problems*, 2nd ed., Vol. I-V, Wiley, New York, 1956-1965.

59. Ker Wilson, W. T., *Vibration Engineering: A Practical Treatment*, Ch. Griffin & Co., London, 1959.

60. Klotter, K., *Technische Schwingungslehre*, Band I: *Einfache Schwingungen*, Band II: *Technische Schwingungslehre*, Springer, Berlin, 1960, 1978.

61. Koloušek, V., *Dynamik der Baukonstruktionen*, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1962.

62. Kolsky, H., *Stress Waves in Solids*, Dover Publications, New York, 1963.

63. Korenev, B. G. and Reznikov, L. M., *Dynamic Vibration Absorbers. Theory and Technical Applications*, Wiley, New York, 1993.

64. Krämer, E., *Maschinendynamik*, Springer, Berlin, 1984.

65. Lalanne M., Berthier, P. and Der Hagopian, J., *Mechanical Vibrations for Engineers*, Wiley, New York, 1983.

66. Lancaster, P., *Lambda Matrices and Vibrating Systems*, Pergamon Press, Oxford, 1966.

67. Lee, K. Ch., *Vibrations of Shells and Rods*, Springer, Berlin, 1999.

68. Leissa, A. W., *Vibration of Plate*s, NASA SP-160, 1969.

69. Leissa, A. W., *Vibration of Shells*, NASA SP-288, 1973.

70. Levy, S. and Wilkinson, J. C., *The Component Element Method in Structural Dynamics*, Mc-Graw-Hill, New York, 1976.

71. Lorenz, H., *Grundbau Dynamik*, Springer, Berlin, 1960.

72. Lowe, M. J. S., *Wave Propagation*, in *Encyclopedia of Vibration*, Academic Press, London, 2002, p.1551-1570.

73. Lyon, R. H., *Random Noise and Vibration in Space Vehicles*, SVIC, Washington, DC, 1967.

74. Macduff, J. N. and Currieri, J. R., *Vibration Control*, McGraw-Hill, New York, 1958.

75. Maia, N. M. M. and Silva, J. M. M., *Theoretical and Experimental Modal Analysis,* Research Studies Press, Taunton, 1997.

76. Magnus, K., *Schwingungen*, Teubner, Stuttgart, 1976.

77. Marguerre, K. and Wölfel, H., *Mechanics of Vibration*, Sijthoff & Noordhoof, Alphen aan den Rijn, 1979.

78. Mazet, R., *Mécanique vibratoire*, Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris, Liège, 1955.

79. McCallion, H., *Vibration of Linear Mechanical Systems*, Wiley, New York, 1973.

80. McConnell, K. G., *Vibration Testing*, Wiley, New York, 1995.

81. McLachlan, N. W., *Theory of Vibrations*, Dover, New York, 1951.

82. Meirovitch, L., *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan, New York, 1967.

83. Meirovitch, L., *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1975.

84. Meirovitch, L., *Fundamentals of Vibrations*, McGraw-Hill International Edition, Boston, 2001.

85. Meirovitch, L., *Principles and Techniques of Vibrations*, Prentice-Hall International, Upper Saddle River, N. J., 1997.

86. Minorsky, N., *Nonlinear Oscillations*, Van Nostrand, New York, 1962.

87. Mobley, R. K., *Vibration Fundamentals*, Newnes, Boston, 1999.

88. Morris, J., *The Strength of Shafts in Vibration*, Crosbie Lockwood & Co., London, UK, 1929.

89. Morrow, C. T., *Shock and Vibration Engineering*, Wiley, New York, 1963.

90. Morse, P. M., *Theoretical Acoustics*, McGraw-Hill, New York, 1968.

91. Morse, P. M., *Vibration and Sound*, McGraw-Hill, New York, 1948.

92. Mottershead, J. E. (ed.), *Modern Practice in Stress and Vibration Analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1989.

93. Müller, P. C. und Schiehlen, W. O., *Lineare Schwingungen,* Akademische Verlaggesellschaft, Wiesbaden, 1976.

94. Myklestad, N. O., *Fundamentals of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1956.

95. Nestorides, E. J., *A Handbook on Torsional Vibration*, Cambridge Univ. Press, 1958.

96. Newland, D. E., *Mechanical Vibration Analysis and Computation*, Longman Scientifical & Technical, Harlow, Essex, 1989.

97. Newland, D. E., *Random Vibrations and Spectral Analysis,* Longman, London, 1975.

98. Nowacki, W., *Dinamica sistemelor elastice*, Editura tehnică, Bucureşti, 1969 (trad. din l. poloneză).

99. Osiński Z. (ed.), *Damping of Vibrations*, A.A. Balkema, Rotterdam, 1998.

100. Palmov, V., *Vibrations of Elasto-Plastic Bodies*, Springer, Berlin, 1998.

101. Panovko, Ya. G., *Elements of the Applied Theory of Elastic Vibrations*, Mir Publishers, Moscow, 1971.

102. Panovko, Ia. G., *Bazele teoriei aplicate a vibraţiilor şi şocurilor*, Maşinostroenie, Moscova, 1976 (în l. rusă).

103. Panovko, Ia. G., *Frecarea internă în timpul vibraţiilor sistemelor elastice*, Fizmatghiz, Moscova, 1960 (în l. rusă).

104. Paz, M., *Structural Dynamics. Theory and Computation*, Van Nostrand Reinhold Comp., New York, 1980.

105. Pestel, E. C. and Leckie, F. A., *Matrix Methods in Elastomechanics*, McGraw-Hill, New York, 1963.

106. Pilkey, W.D. and Pilkey, B., *Shock and Vibration Computer Programs: Reviews and Summaries*, SVIC, Washington, DC, 1975.

107. Prentis, J. M., *Dynamics of Mechanical Systems*, 2nd ed., Ellis Horwood, Chichester, 1980.

108. Pusey, H. C., Volin, R. H. and Showalter, J. G., *An International Survey of Shock and Vibration Technology*, SVIC, Washington, DC, 1979.

109. Radeş, M., *Mechanical Vibrations*, Editura Printech, Bucureşti, 2006.

110. Radeş, M., *Metode dinamice pentru identificarea sistemelor mecanice*, Editura Academiei, Bucureşti, 1979.

111. Rao, J. S., *Dynamics of Plates*, Marcel Dekker, New York, 1999.

112. Rao, S. S., *Mechanical Vibrations*, 3rd ed., Addison-Wesley, 1995.

113. Rayleigh, Lord (Strutt, J. W.), *The Theory of Sound*, Macmillan, London, 1894 (Reprinted by Dover, 1945).

114. Richart, F. E., Jr., Hall, J. R., Jr. and Woods, R. D., *Vibrations of Soils and Foundations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1970.

115. Robson, J. D., *Random Vibration*, Edinburgh Univ. Press, UK, 1964.

116. Rocard, Y., *Dynamique générale des vibrations*, 3rd ed., Masson, Paris, 1960.

117. Roseau, M., *Vibrations des systèmes mécaniques*, Masson, Paris, 1984.

118. Ruzicka, J. E. and Derby, T. F., *Influence of Damping in Vibration Isolation*, SVIC, Washington, DC, 1971.

119. Salter, J. P., *Steady-State Vibration*, Kenneth Mason, Havant, 1969.

120. Scanlan, R. H. and Rosenbaum, R., *Aircraft Vibration and Flutter,* Macmillan Co., New York, 1951.

121. Sevin, E. and Pilkey, W. D., *Optimum Shock and Vibration Isolation*, SVIC, Washington, DC, 1971.

122. Seto, W. W., *Theory and Problems of Mechanical Vibrations*, Schaum, New York, 1964.

123. Smith J. D., *Gear Noise and Vibration*, Marcel Dekker, New York, 1999.

124. Snowdon, J. C., *Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems*, Wiley, New York, 1968.

125. Snowdon, J. C. and Ungar, E. E., *Isolation of Mechanical Vibration, Impact and Noise*, AMD Vol.1, ASME, New York, 1973.

126. Sólnes, J., *Stochastic Processes and Random Vibrations*. *Theory and Practice,* Wiley, New York, 1997.

127. Soong, T. and Grigoriu, M., *Random Vibration of Mechanical and Structural Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.

128. Sorokin, E. S., *Teoria amortizării interne în vibrațiile sistemelor elastice*, Gosstroiizdat, Moscova, 1960 (în l. rusă).

129. Steinberg, D. S., *Vibration Analysis for Electronic Equipment*, 3rd ed., Wiley, New York, 2000.

130. Stoker, J. J., *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*, Wiley, New York, 1950.

131. Szemplińska-Stupnicka, W., *The Behaviour of Nonlinear Vibrating Systems*, Vol.2, *Advanced Concepts and Applications to Multi-Degree-of-Freedom Systems*, Kluwer, 1990.

132. Thomson, W. T., *Theory of Vibration with Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1972; 4th ed., Stanley Thornes Publ., Cheltenham, 1998.

133. Thomsen, J. J., *Vibrations and Stability. Order and Chaos*, McGraw-Hill, New York, 1997.

134. Timoshenko, S., Young, D. H. and Weaver, W. Jr., *Vibration Problems in Engineering*, 4th ed., Wiley, New York, 1974 (1st ed. 1928).

135. Tong, K. N., *Theory of Mechanical Vibration*, Wiley, New York, 1960.

136. Tongue, B. H., *Principles of Vibration*, Oxford University Press, 2002.

137. Tse, F. S., Morse, I. E. and Hinkle, R. T., *Mechanical Vibrations: Theory and Applications*, Allyn and Bacon, Boston, MA, 1963, 2nd ed., 1978.

138. Tuplin, W. A., *Torsional Vibrations*, 2nd ed., Sir Issac Pitman and Sons, London, UK, 1966.

139. Ulbrich, H., *Maschinendynamik*, Teubner, Stuttgart, 1996.

140. Vernon, J. B., *Linear Vibration Theory: Generalized Properties and Numerical Methods*, Wiley, New York, 1967.

141. Vierck, R. K., *Vibration Analysis*, International Textbook Co., Scranton, PA, 1967.

142. Voinea, R. şi Voiculescu, D., *Vibraţii mecanice*, Institutul Politehnic Bucureşti, 1979.

143. Voinea, R., Voiculescu, D. şi Ceauşu, V., *Mecanica*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1975.

144. Wagner, K. W., *Lehre von den Schwingungen und Wellen*, Dietrich Verlag, Wiesbaden, 1957.

145. Warburton, G. B., *The Dynamical Behaviour of Structures*, Pergamon Press, Oxford, 1964.

146. Walker, D. N., *Torsional Vibration of Turbomachinery*, McGraw-Hill Engineering Reference, New York, 2004.

147. Wallace, R. H., *Understanding and Measuring Vibrations*, Wykeham Publications, London, 1970.

148. Yu, Y.-Y., *Vibrations of Elastic Plates*, Springer, Berlin, 1995.

149. Ziegler, G., *Maschinendynamik*, Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1977.

150. **** *Rezistenţă. Stabilitate. Vibraţii*, 3 vol. (ed. I. A. Birger şi Ia. G. Panovko), Maşinostroenie, Moscova, 1968.

Index

Absorbitor dinamic 164
– Stockbridge 169
Acceleranță 51
Accelerometru 63
Amortizare 6
– coulombiană 6
– critică 34
– de tip Rayleigh 151
– ereditară 66
– histeretică 6, 47
– modală 152
– structurală 6, 46
– vâscoasă 6, 34
– – echivalentă 6, 49
– – neproporțională 173
– – proporțională 151
Amortizor 34
– Houdaille 162
Amplitudine 13
– complexă 50
– la rezonanță 44
Analiză modală 108, 151
Antirezonanță 29, 111, 137
Arbore 197
Atenuarea undelor 306

Bara Bernoulli-Euler 261
– cu mase concentrate 186
– încastrată la capete 267
– în consolă 265
– liberă la capete 266
– Timoshenko 290
Bătăi 23, 148
Buclă de histerezis 45

Cadru plan 222
Captor de viteze 63
– seismic 60
Câtul lui Rayleigh 107
Clădire forfecată 195
Coeficient de amortizare 34
– – modală 152
– – structurală 47
– – vâscoasă 34
– de flexibilitate 128, 189
– de influență 125
Condiții inițiale 11
– la limită 263
– – naturale 273
Coordonate locale 215
– modale 106
– naturale 212
Cuplaj dinamic 140
– static 140
Curbe de rezonanță 43
– de răspuns în frecvență 43
– – în frecvență 24, 43, 74, 158, 244

Decrement logaritmic 37
Diagrame 52
– Bode 53, 158
– deplasare-forță 44
– FRF 244
– Nyquist 53
– polare 55
Distorsiuni 63

Ecuația caracteristică 102
– de mișcare 103, 113, 126, 139, 220
– diferențială de echilibru 223
– undelor 294, 316
Energie cinetică 15
– de deformație 194, 214, 227, 238
– disipată prin amortizare 45
– potențială 15
Excitație armonică 21, 108, 280
– cu mase excentrice în rotație 28
– la bază 29, 59
– nearmonică 80
– prin masă 20
– prin şoc 88

Factor de amortizare 175
– – structurală 47
– de amplificare dinamică 24

– de pierderi 40
Fenomene de salt 79
Figuri Lissajous 45
Flexibilitate 124
Forme proprii 265, 286, 289
Formula lui Dunkerley 192
– – Rayleigh 17, 194
Fracţiune din amortizarea critică 35
Frecvenţa 12
– de rezonanţă 43
– proprie 163
– – amortizată 26
– – fundamentală 16
– – neamortizată 10, 14
Funcţii de formă 213, 225
– de răspuns în frecvenţă 51, 157, 243
– de transfer 156

Grade de libertate 99
Grilaje 236
Grinzi continue 271

Impedanţă mecanică 52
Impuls 81
– dreptunghiular 86
– rampă 81
– semisinusoidal 91
– triunghiular 84, 89
Integrala lui Duhamel 21
Izocrone 75

Lungime de undă 297

Masa adiţională 49
– aparentă 52
– modală 187
Matricea de amortizare 151
– de flexibilitate 125
– de masă 101, 238
– – coerentă 215, 229
– – modală 108
– de rigiditate 101, 227, 237
– – modală 108
– FRF 157, 243
Metoda energetică 15
– lui Rayleigh 16
– punctelor de semiputere 47
Mişcare armonică 9
Mobilitate 51
Mod de corp rigid 116, 267
– propriu 101, 115, 127, 141, 263

Normalizare 102, 107, 264

Orthogonalitate 105, 269
Oscilaţii 1

Pendule cuplate 145
Perioada proprie 11
Precesia rotorilor 64
Principiul lui d'Alembert 100
Propagarea energiei 304
– undelor 291
Pulsaţia proprie 102
– – amortizată 35, 153, 175
– – neamortizată 10, 14, 177
Puncte de semiputere 48

Raport de amortizare 35, 152
– de angrenare 120
Răspuns la impuls 81, 89, 91
– la excitaţie armonică 108, 117, 135, 280
Receptanţă 51, 179
Rezonanţă 5, 25
Rigiditate 11
– cubică 72
– dinamică 52
– la răsucire 14
– modală 187
– torsională 14
Rotorul Laval 31

Salt 79
Sisteme
– amortizate 150
– continue 2, 261
– cu două grade de libertate 99
– cu mai multe grade de libertate 185
– cu mase concentrate 186
– cu roţi dinţate 120
– cu un grad de libertate 3, 9
– discrete 2, 206
– neliniare 71
– ramificate 122
– torsionale 13, 197
Spectrul răspunsului 92
Structură cu subsisteme repetate 204
– din bare articulate 212
– multietajată 195

Şoc 80

Tensiuni dinamice 119
Transmisibilitate 30, 59

Trecerea prin rezonanță 27
Turație critică 31

Unde armonice 297
– elastice 291
– ghidate 333
– în medii elastice 316
– Lamb 333
– longitudinale 294, 318
– Love 327, 337
– Rayleigh 321
– Stoneley 327
– transversale 310, 318
Unghi de fază 11

Valori proprii 127
Vectori modali 103, 131
– proprii 127
Vibrații 1
– autoîntreținute 5
– cuplate de translație şi rotație 139
– de încovoiere 124
– de torsiune 113, 288
– de translație 100
– forțate 4
– – amortizate 40
– – neamortizate 20
– libere 4, 101
– – amortizate 33, 151
– – neamortizate 9
– longitudinale 285
– staționare 41
– tranzitorii 80
– transversale 310, 318
Vibrometru 63
Viteza de fază 300, 310
– de grup 302, 310, 312